Über involutorische Raumverwandtschaften und solche Transformationen, bei denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Hans Pelzner

Praktikant am K. Theresiengymnasium in München.

Tag der Annahme der Dissertation: 12. März 1913.

Referent: *Professor Dr. Karl Doehlemann.*

Korreferent: *Professor Dr. Heinrich Liebmann.*

München 1913

Druck von B. Heller, Herzog Maxstraße 4

Über involutorische Raumverwandtschaften und solche Transformationen, bei denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Vorgelegt von

Hans Pelzner
Praktikant am K. Theresiengymnasium in München.

Tag der Annahme der Dissertation: 12. März 1913.

Referent:
Professor Dr. Karl Doehlemann.

Korreferent:
Professor Dr. Heinrich Liebmann.

München 1913
Druck von B. Heller, Herzog Maxstraße 4

Vorwort

Die vorliegende Arbeit enthält in ihrem ersten, kürzeren Teile (Kapitel I) eine erschöpfende Zusammenstellung der involutorischen Raumverwandtschaften bis zum 3. Grade. Dazu wurde auch der Beweis dafür benötigt, daß die allgemeine (3,3) Verwandtschaft durch 3 Korrelationen vermittelt werden kann, und in § 3 erbracht. Organisch schloß sich daran die Anwendung dieser Beweisführung auf die monoidalen involutorischen Verwandtschaften.

Da eine allgemeine involutorische Raumtransformation 4. Ordnung nicht bekannt ist, war meine nächste Aufgabe, spezielle Verwandtschaften aufzufinden, die in beiderlei Sinn vom 4. Grade sind. Damit wurde ich auf den zweiten und Hauptteil der Arbeit (Kapitel II und III) geführt, in dem ich die sämtlichen Raumverwandtschaften feststellte, in denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Kegelschnitt als Doppelkurve entsprechen.

Der Gang der Untersuchungen ist an dem Beispiel der (4,4) Verwandtschaft ausführlich durchgeführt, die übrigen 7 sich ergebenden Verwandtschaften im Kapitel III in knapper Form zusammengefaßt.

Auf diese Arbeit hingewiesen wurde ich durch Herrn Professor Dr. Doehlemann. Für die wertvollen Anregungen und das hilfsbereite Entgegenkommen sei mir an dieser Stelle gestattet, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Inhalts-Verzeichnis

Seite

Kapitel I: Eindeutige involutorische Punktverwandtschaften im Raume vom 1. bis 3. Grade . . . . . 7—23

§ 1. Involutorische eindeutige räumliche Punktverwandtschaften vom 1. Grade 7

§ 2. Involutorische eindeutige räumliche Punktverwandtschaften vom 2. Grade . . . . . 8—10

§ 3. Über den einzigen Typus der in beiderlei Sinn kubischen Verwandtschaft unter Vorraussetzung allgemeiner Flächen 3. Ordnung . . . . . 10—15

§ 4. Die involutorischen kubischen Punktverwandtschaften mit allgemeinen Flächen 3. Ordnung . . . . . 15—16

§ 5. Die monoidalen involutorischen Raumtransformationen vom 3. Grade . . . . . 16—17

§ 6. Darstellung monoidaler involutorischer Raumverwandtschaften durch 3 räumliche Polaritäten . . . . . 17—23

Kapitel II: Eine spezielle eindeutige Punktverwandtschaft im Raume, die in beiderlei Sinn vom 4. Grade ist . . . . . 23—46

§ 1. Geometrische Abbildung der Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt . . . . . 23—26

§ 2. Netze von Kurven 4. Ordnung auf der Fläche und deren Abbildung in der Ebene . . . . . 27—31

§ 3. Nachweis des entstehenden homaloidischen Gebüsches und Herstellung der Raumverwandtschaft . . . . . 32—35

§ 4. Bestimmung der Fundamentalflächen . . . . . 35—43

§ 5. Verschiedene Folgerungen . . . . . 43—44

Zusatz zu Kapitel II: Analytische Darstellung dieser (4,4) Verwandtschaft . . . . . 44—46

Kapitel III: Die übrigen Raumtransformationen, in denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen . . . . . 46—61

§ 1. Die Verwandtschaft (4,7) . . . . . 46—51

§ 2. Die zwei Verwandtschaften (4,6) . . . . . 51—55

§ 3. Die drei Verwandtschaften (4,5) . . . . . 55—59

§ 4. Die Verwandtschaft (4,3) . . . . . 59—61

Literatur-Verzeichnis 63

Kapitel I.

Eindeutige involutorische Punktverwandtschaften im Raume vom 1. bis 3. Grade.

§ 1. Involutorische eindeutige räumliche Punktverwandtschaften vom 1. Grade.

Die in beiderlei Sinn lineare, eindeutige Punkttransformation des Raumes ist die Kollineation. Es gibt 2 Fälle, in denen dieselbe durchweg involutorischen Charakter annimmt, sodaß einem Element ein und dasselbe Element entspricht, ob man es nun zum 1. oder 2. der räumlichen Systeme gehörig betrachtet.

Diese 2 Fälle sind:

a) Die harmonische Homologie im Raume,

b) die geschart involutorische Verwandtschaft oder windschiefe Involution.

In *a)* gibt es einen Punkt S, der sich selbst entspricht und eine Ebene σ, die punktweise koinzident ist. Die Strahlen durch S entsprechen sich selbst und tragen eine Punktinvolution mit den Doppelpunkten in S und dem Schnittpunkte mit der Koinzidenzebene σ. Durch diese Involutionen sind die Punkte des Raumes in eine involutorische Verwandtschaft gesetzt.

In *b)* gibt es 2 punktweise sich selbst entsprechende Axen u, v. Jeder Strahl der durch dieselben bestimmten Strahlenkongruenz trägt eine Punktinvolution, deren Doppelpunkte in den Schnittpunkten mit den zwei Axen u, v liegen. Dadurch ist der 2. Typus der involutorischen Kollination festgelegt. Andere gibt es nicht.[1])

[1]) U. a. Doehlemann, Geom. Transf. I. S. 296.

§ 2. Involutorische eindeutige räumliche Punktverwandtschaften vom 2. Grade.

Als allgemein geltend sind folgende Bemerkungen vorauszuschicken:

a) Bei einer geometrischen Verwandtschaft zwischen 2 räumlichen Systemen Σ und Σ' entsprechen im allgemeinen den Ebenen des einen Raumes Flächen nter Ordnung im andern, dagegen den Ebenen des 2. Raumes Flächen der Ordnung m im ersten. Soll aber eine Verwandtschaft involutorisch sein, so muß die einer Ebene entsprechende Fläche sich ergeben, ob man nun die Ebene zu Σ oder Σ' gehörig betrachtet, also es muß $m = n$ sein.

b) Bei geometrischen Verwandtschaften von höherem als dem 1. Grade treten singuläre Elemente auf, die Fundamentalelemente (kurz F-Elemente), für welche die ein-eindeutige Zuordnung nicht mehr gilt. Soll eine solche Verwandtschaft involutorisch werden, so müssen die F-Systeme der beiden aufeinander bezogenen Räume notwendig zusammenfallen. Denn ist A ein F-Punkt von Σ und f_a z. B. die entsprechende F-Kurve in Σ', so muß f_a auch dem A entsprechen, wenn dieses als Punkt von Σ' aufgefaßt wird, also muß f_a auch F-Kurve in Σ sein. Das Zusammenfallen der F-Systeme ist also eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für räumliche involutorische Transformationen.

Ist also nun $m = n = 2$, so entspricht dem dreifach unendlichen System der Ebenen, ob man sie nun zu Σ oder Σ' zählt, ein dreifach unendliches System von Flächen φ^2 2. Ordnung. Einer Geraden l von Σ entspricht eine Raumkurve L^x in Σ', einer Ebene ε' von Σ' entspricht eine φ^2. Diese hat mit l 2 Schnittpunkte gemein, soviel als die entsprechenden Gebilde L^x und ε' gemeinsam haben, die Kurve L^x ist also von der Ordnung 2 und dieselbe Überlegung muß für den Raum Σ' gelten. Soll also eine eindeutige involutorische quadratische Raumverwandtschaft bestehen, so müssen den Ebenen Flächen 2. Ordnung, den Geraden Kegelschnitte entsprechen. Je 2 Ebenen schneiden sich nun in einer solchen Geraden, die homologen φ^2 müssen sich demnach in einem Kegelschnitt begegnen, auf den die Gerade eindeutig abgebildet ist. Der Restschnitt $(4-2) = 2$. Ordnung ist eine feste, d. h. eine F-Kurve des ganzen φ^2-Gebüsches. Aus zwei windschiefen Geraden kann aber dieser Restschnitt nicht bestehen, wie man sofort zeigt:

Hätten beide φ^2 den Kegelschnitt k^2 und 2 windschiefe Gerade p und q gemeinsam, so müßten p und q dem k^2 begegnen. Durch einen Kegelschnitt und zwei demselben je einmal begegnende windschiefe Gerade ist aber eine Fläche 2. Ordnung bereits vollkommen bestimmt, sodaß die φ^2 kein Gebüsch bilden könnten.

Es bleibt für unsere Überlegung somit nur noch übrig, daß der festbleibende Schnitt zweier φ^2, also die F-Kurve, ein (ev. zerfallender) Kegelschnitt ist. Da ein solcher für eine φ^2 5 Bedingungen repräsentiert, so gibt es ∞^4 φ^2 durch ihn, die sich weiterhin noch in einem Kegelschnitt treffen. Ein Gebüsch ist erst durch einen weiteren gemeinsamen Punkt S aller φ^2 festgelegt. Im besonderen Fall kann derselbe auch ein Punkt der F-Kurve sein, dann haben alle φ^2 außer dieser gemeinsamen Kurve noch die nämliche Tangentialebene in dem betreffenden Punkte. Dieser Fall wurde von Cremona besonders vermerkt.[2])

Ein homaloidales Gebüsch von Flächen 2. Ordnung ist also dasjenige mit einem Grundpunkte S und einem Grundkegelschnitt, und von dieser Art nur kann das Gebüsch in einer eindeutigen, in beiderlei Sinn quadratischen Punktverwandtschaft des Raumes sein.

Die Flächen φ^2 von der Ordnung $n = 2$ haben alle einen gemeinsamen $(n - 1) = 1$ fachen Punkt, sind also sog. Monoide. Diese Verwandtschaft kann involutorisch werden. Welche Typen von allgemeinen monoidalen involutorischen Transformationen des Raumes möglich sind, hat z. T. Martinetti, in erweitertem und erschöpfendem Maße Montesano untersucht.

Wie Montesano[3]) dargelegt hat, gibt es 4 wesentliche Typen von involutorischen monoidalen Transformationen. Die 4. Spezies ist immer kubisch. Für die 2. und 3. Spezies ist $n = 2k - 1$, also ungerade, sodaß für den in Frage stehenden Fall der quadratischen Verwandtschaft nur die 1. Spezies bleibt. Der $(n - 1) =$ hier einfache Punkt S trägt eine Involution von Strahlen, die vom Grade μ ist, wo natürlich μ nicht $> n$ sein kann, da ja sonst den durch S gehenden Ebenen Flächen entsprechen würden, deren Ordnung 2 übersteigt. Wie man an der erwähnten Stelle abgeleitet findet, sind die F-Strahlen der Strahlinvolution Teile der F-Kurve. Nehmen wir $\mu = 2$ an, so gehören die sich ergebenden 3 einfachen F-Strahlen zur F-Kurve. Wie wir jedoch oben sahen, kann letztere nur aus einem Kegelschnitt, im besonderen Falle also aus 2 sich schneidenden, nicht aber 3 derartigen Geraden bestehen. Es bleiben somit lediglich die 2 Möglichkeiten

[2]) Göttinger Nachrichten. 1871. S. 130.
[3]) Lomb. Ist. Rend. Ser. 2. Vol. 21. S. 579.

übrig, daß die Strahlen durch S eine Identität oder eine Involution 1. Ordnung bilden. Sie sind von Martinetti[4]) erledigt worden:

Der 1. Fall ist eine perspektive monoidale involutorische Transformation; es gibt eine Koinzidenzfläche 2. Ordnung, die nicht durch S geht. Das F-System besteht aus dem (n — 1) = einfachen Punkt S, der nicht durch S gehenden F-Kurve k^2 2. Ordnung, sowie der Ebene desselben und dem Strahlenkegel (Sk^2) als F-Flächen. Durch Zerfall der Koinzidenzfläche kommt man zu einem Sonderfall.

Bei der 2. Art wird der Bündel S ein involutorischer mit einem sich selbst zugeordneten Strahlbüschel in der Ebene π und einem sich selbst homologen Ebenenbüschel mit der Axe p. In π erhalten wir einen Koinzidenzkegelschnitt, außerdem auf p 2 einzelne Koinzidenzpunkte. Das F-System ist dem im vorigen Falle analog. Für diese Art findet man 6 wesentliche Spezialfälle.[5])

§ 3. Über den einzigen Typus der in beiderlei Sinn kubischen Verwandtschaft unter Voraussetzung allgemeiner Flächen 3. Ordnung.

Schreiben wir 3 in den Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ und $x'_1 \ldots x'_4$ lineare Gleichungen an und nennen die Punkte mit den Koordinaten x_i zu einem Raume Σ, die mit den Koordinaten x'_i als zu einem Raume Σ' gehörig, so ist mit diesem Ansatze zwischen den beiden Räumen eine in beiderlei Sinn kubische Punktverwandtschaft definiert. Zu jedem Wertequadrupel x_i ergibt sich ein solches von x'_i. Dem Punkte von Σ mit den Koordinaten x_i können wir eindeutig den Punkt x'_i zuordnen und die Eindeutigkeit findet auch im umgekehrten Sinne statt. Diese Raumtransformation rührt von Magnus her und wurde unabhängig von diesem von Cayley und Nöther[6]) eingehend untersucht.

Ich behaupte, daß jede in beiderlei Sinn kubische Verwandtschaft (die ich der Kürze halber immer als [3,3] Verwandtschaft bezeichne), mit allgemeinen Flächen 3. Ordnung durch 3 solche bilineare Gleichungen dargestellt wird. Eine bilineare Gleichung zwischen 4 Koordinaten x_i und den 4 Koordinaten x'_i:

$$\text{I.}\quad (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\cdot x'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\cdot x'_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4)\cdot x'_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4)\cdot x'_4 = 0$$

[4]) Lombard. Ist. Rend. Ser. 2. Vol 18. S. 132—142.
[5]) Lomb. Ist. Rend. Ser. 2. Vol. 18. S. 132—142.
[6]) Mathematische Annalen. Bd. 3. S. 547.

fasse ich als analytische Darstellung einer Korrelation auf. Denn setzt man für x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordination eines Punktes im Raume Σ ein, so stellt jeweils:

$$A x'_1 + B x'_2 + C x'_3 + D x'_4 = 0$$

eine Ebene in einem Raume Σ' vor, deren Punkte die veränderlichen Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 besitzen. Jedem Punkte von Σ wird so eine Ebene in Σ' zugewiesen, welche die Koordinaten:

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} A &= \varrho \cdot \xi'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ B &= \varrho \cdot \xi'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ C &= \varrho \cdot \xi'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ D &= \varrho \cdot \xi'_4 = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned}$$

besitzt.

Diese Gleichungen stellen in der Tat eine Korrelation vor.

Durch 3 bilineare Gleichungen werden 3 solche Korrelationen zwischen den Räumen Σ und Σ' hergestellt. Zu jedem Punkte x_i ergeben sich 3 zugeordnete Ebenen des Raumes Σ', deren Punkte durch die veränderlichen Koordinaten x'_i dargestellt sind. Nur ein Punkt, nämlich der Schnittpunkt dieser 3 Ebenen erfüllt durch seine Koordinaten x'_i die 3 Gleichungen gleichzeitig, ist also identisch mit dem Punkte des Raumes Σ', welcher in der durch die 3 bilinearen Gleichungen vermittelten (3,3) Verwandtschaft eindeutig dem Punkte x_i des Raumes Σ zugewiesen ist. Auf die gleiche Weise wäre aber auch zu erkennen, wie der Punkt x_i als Schnittpunkt dreier Ebenen, die dem Punkte x'_i entsprechen, entsteht.

Bezieht man also den Punktraum Σ in dreifacher Weise korrelativ auf den Ebenenraum Σ', so ist durch die zu den Punkten von Σ dreifach konjugierten (d. h. in allen 3 Korrelationen konjugierten) Punkte eine in beiderlei Sinn kubische Verwandtschaft hergestellt.

Man muß nun zeigen, daß die allgemeine (3,3) Verwandtschaft durch 3 Korrelationen erzeugt werden kann; da jede Korrelation durch eine Gleichung der Art II repräsentiert wird, so kann man alsdann offenbar ohne weiteres rückwärts schließen, daß die allgemeine Verwandtschaft auch durch 3 bilineare Gleichungen darstellbar ist.

Es gibt nur eine birationale Raumverwandtschaft vom Typus (3,3), wie Loria und Sturm gefunden haben. Wie ich von R. Sturm[7]) entnehme, bilden hierbei in beiden Räumen die Flächen 3. Ordnung F_3

[7]) Jahresbericht der deutschen Mathem.-Vers. Bd. 14. S. 18—24 und Geometr. Verwandtsch. IV. S. 369.

Gebüsche mit einer F-Kurve 6. Ordnung vom Geschlechte 3 und dem Range 16. Dieselbe besitzt[8]) für eine F_3 die Bedeutung von 16 Punkten, sodaß tatsächlich ∞^3 F_3 durch sie möglich sind. Die Jakobische Fläche eines jeden solchen Gebüsches besteht aus der Regelfläche der dreifachen Sekanten von R^6_3; dieselbe ist 8. Ordnung: J_8. Einer Geraden entspricht wegen $m = n = 3$ i. a. eine kubische Raumkurve, tatsächlich begegnen sich ja 2 F_3 mit gemeinsamer R^6_3 noch in einer Raumkurve 3. Ordnung.[9])

Einer dreifachen Sekante a der F-Kurve entspricht ein Punkt A' der F-Kurve im andern Raum, da 3 Trisekanten, entsprechend den 3 auf a gelegenen F-Punkten, sich abspalten; es sind dies die 3 durch A' laufenden dreifachen Sekanten.

Man fasse nun 2 Ebenen α_1 und α_2 ins Auge, die sich in einer solchen Trisekante a der R^6_3 schneiden. Die ihnen entsprechenden Homaloide $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$ schneiden sich dann außer in R'^6_3 noch in den 3 durch A' laufenden Trisekanten.

Man erkennt nebenbei, daß diese 2 Homaloide hier Flächen 3. Ordnung mit dem Doppelpunkte A' sind, die also eindeutig auf die Ebenen α_1 und α_2 abgebildet sind.

Nun denke man sich aus 3 beliebigen Punkten P'_1, P'_2, P'_3 die $F'^3\alpha_1$ durch kollineare Ebenenbündel erzeugt (Graßmann'sche Erzeugungsweise); diese müssen, da $F'^3\alpha_1$ einen Doppelpunkt aufweisen soll, die Besonderheit haben, daß einmal 3 homologe Strahlen der Bündel in einem Punkte A' zusammenlaufen. Jedem Punkte M von α_1 ist eine Ebene μ'_1 bezw. μ'_2, μ'_3 in jedem der 3 Bündel zugeordnet, und da einer durch den Punkt M gehenden Geraden in jedem der Bündel eine in der homologen Ebene μ_1, resp. μ_2, μ_3 gelegene Gerade entspricht, wofür sofort der Nachweis erbracht werden soll, so ist die Ebene α_1 reziprok auf jene 3 Bündel bezogen.

Um diesen Beweis zu finden, beachte man, daß einer Geraden g von α_1, die durch M geht, eine Kurve 3. Ordnung der $F'^3\alpha_1$ entspricht. Dieselbe wird aber durch 3 projektive Ebenenbüschel jener Bündel P'_1, P'_2, P'_3 erzeugt, und da jedem Flächenpunkt die 3 ihn erzeugenden Ebenen als charakteristisch zugehören, so sind auch den Punkten von g in α_1 die Ebenen der Büschel zugeordnet, die jene R'^3_g erzeugen und somit dem Träger g dieser Punktreihe in jedem der 3 Bündel die Axe des Büschels, durch welche auch μ'_1 resp. μ'_2, μ'_3 hindurchgehen. Das Punktfeld α_1 ist also auf jeden der 3 Bündel P'_1, P'_2, P'_3 reziprok bezogen.

[8]) Sturm, Flächen 3. Ordnung. S. 232.
[9]) Sturm, Flächen 3. Ordnung. S. 203.

Es wäre jetzt ein Weg zu suchen, wie man je ein Paar der Bündel z. B. $P'_1\,Q'_1$, $P'_2\,Q'_2$, $P'_3\,Q'_3$ zusammennimmt, sodaß durch ihre Zuordnung zu den Punktfeldern der Ebenen α_1, α_2 je eine räumliche Korrelation festgelegt wird. 3 solche Korrelationen erzeugen alsdann (siehe oben) selbst eine in beiderlei Sinn kubische Verwandtschaft, für welche man nachweisen kann, daß sie mit unserer ursprünglichen identisch ist.

Ich stütze mich dabei auf den bekannten Satz, daß eine Korrelation zwischen 2 räumlichen Systemen festliegt, wenn man 2 Punktfelder des einen auf 2 Bündel des andern reziprok bezieht und der Schnittgeraden der 2 Ebenen die Verbindungsgerade der Bündelzentren zuweist, so zwar, daß der Punktreihe jener Schnittgeraden das Ebenenbüschel jener Verbindungsgeraden zugeordnet ist.

Man stelle sich durch den Doppelpunkt der 2 Flächen 3. Ordnung A' auf R'^6_3 3 beliebige Gerade vor. Sie schneiden $F'^3\alpha_1$ außerdem noch in P'_1, P'_2, P'_3, $F'^3\alpha_2$ in Q'_1, Q'_2, Q'_3, sodaß die Paare $P'_1\,Q'_1$, $P'_2\,Q'_2$, $P'_3\,Q'_3$ auf demselben Strahle liegen. Alsdann denke man $F'^3\alpha_1$ durch die kollinearen Bündel P'_1, P'_2, P'_3 und $F'^3\alpha_2$ durch die kollinearen Bündel Q'_1, Q'_2, Q'_3 erzeugt. Damit dies möglich wird, dürfen diese 3 Zentren in jeder der F'^3 nicht auf ein und derselben, der Fläche angehörigen Raumkurve 3. Ordnung liegen. Es muß also gezeigt werden, daß man die 6 Zentren tatsächlich dieser Bedingung gemäß annehmen kann.

Sei R'^3_1 die durch die Strahlen der kollinearen Ebenenbündel P'_1, P'_2 erzeugte Raumkurve von $F'^3\alpha_1$ und C die Kurve, welche durch deren Projektionskegel aus A' auf $F'^3\alpha_2$ ausgeschnitten wird, dann muß P'_3 so angenommen werden, daß es nicht auf R'^3_1 liegt, also muß Q'_3 außerhalb C gelegen sein. Ist nun R'^3_2 die durch die homologen Strahlen der kollinearen Bündel Q'_1 und Q'_2 definierte Raumkurve 3. Ordnung auf $F'^3\alpha_2$, so darf Q'_3 auch nicht auf dieser gelegen sein. Wählt man also Q'_3 auf $F'^3\alpha_2$ außerhalb C und R'^3_2, so sind die 6 Zentren der Bedingung gemäß angenommen.

Den nicht fundamentalen Punkten von a entspricht in der Transformation der F-Punkt A', im Bündel P'_1 sowohl als in Q'_1 aber ein Ebenenbüschel, die also beide die Axe $\overline{P'_1\,Q'_1}$ haben und wegen der beiderseitigen Zuordnung zu a projektiv sind. Da den 3 auf a gelegenen F-Punkten in der Transformation jedoch 3 durch A' gehende Trisekanten von R'^6_3, in den 2 Ebenenbüscheln 3 den beiden gemeinsame Ebenen (bestimmt durch $\overline{P'_1\,Q'_1}$ und diese 3 Trisekanten) entsprechen, so sind diese beiden projektiven Ebenenbüschel identisch.

Einem Punkt von a entspricht also sowohl im Bündel P'_1 wie Q'_1 die gleiche durch $\overline{P'_1 Q'_1}$ gehende Ebene. Analoges trifft für die Axen $\overline{P'_2 Q'_2}$ und $\overline{P'_3 Q'_3}$ ein.

Wir haben also in der Tat durch die Zuordnung der 2 Bündel P'_1 und Q'_1 zu den Punktfeldern α_1 und α_2 eine räumliche Korrelation bestimmt, da der Schnittgeraden $\alpha_1 \times \alpha_2 = a$ der Verbindungsstrahl $\overline{P'_1 Q'_1}$ und der Punktreihe der ersteren das Ebenenbüschel des letzteren entspricht. Ebenso legen die Bündel $P'_2 Q'_2$ und $P'_3 Q'_3$ mit α_1 und α_2 eine 2. und 3. räumliche Korrelation fest.

Auch in jeder dieser Reziprozitäten entspricht einem Punkte M von α_1 oder α_2 eine Ebene und diese 3 Ebenen schneiden sich in dem Punkte der $F'^3\alpha_1$ resp. $F'^3\alpha_2$, der in der ursprünglichen (3,3) Verwandtschaft dem M entspricht.

Durch diese 3 räumlichen Korrelationen ist nun selbst wieder eine in beiderlei Sinn kubische Verwandtschaft hergestellt. Den Punkten von α_1 und α_2 entsprechen darin die nämlichen Punkte auf $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$, wie in der ursprünglichen allgemeinen (3,3) Verwandtschaft, von der wir ausgingen. Ferner wissen wir, daß eine solche Verwandtschaft eine F-Kurve 6. Ordnung vom Geschlechte 3 in jedem Raume besitzt. Da die Homaloide $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$ sich in R'^6_3 und 3 Geraden begegnen, so kann nur R'^6_3 diese F-Kurve des Raumes Σ' sein und somit die Regelfläche J'_8 ihrer dreifachen Sekanten die Jakobische Fläche in Σ'.

Diese Tatsachen genügen, um überhaupt die Identität beider Transformationen nachzuweisen. Dies ist geschehen, wenn man gezeigt hat, daß man zu einem Punkte X in Σ denselben Punkt X' in Σ' erhält, ob man nun zu seiner Auffindung die allgemeine (3,3) Verwandtschaft oder diese durch die 3 Korrelationen definierte gebraucht.

Man erzeuge X als Schnittpunkt dreier beliebiger Ebenen. Jede derselben denke man durch 3 in α_1 oder α_2 gelegene Punkte bestimmt. Diesen Punkten kommen dann in beiden Transformationen die nämlichen 3 Punkte zu, da sie Punkte von $F'^3\alpha_1$ oder $F'^3\alpha_2$ sind. Wie durch die 3 Punkte in Σ die Ebene bestimmt ist, so legen die entsprechenden 3 die homologe Fläche 3. Ordnung fest, und da außer der F-Kurve R'^6_3 noch diese 3 Punkte gemeinsam sind, so ergibt sich diese Fläche 3. Ordnung in beiden Transformationen als zur Ebene homolog. 3 solche Ebenen von Σ bestimmen den beliebigen Punkt X, dem also, da 3 Flächen des Gebüsches 3. Ordnung durch R'^6_3 sich außerhalb nur noch in einem Punkte schneiden, in beiden Transformationen der gleiche Punkt X' entspricht. Bis jetzt fanden wir also, daß den Punkten des Raumes Σ in beiden Transformationen die näm-

lichen Punkte von Σ zugeordnet sind; da beide aber eindeutig umkehrbare Transformationen sind, so folgt auch die totale Identität der 2 Verwandtschaften. Damit ist jetzt bewiesen, daß die durch 3 bilineare Gleichungen vermittelte Raumtransformation die allgemeine (3,3) Verwandtschaft ist.

§ 4. Die involutorischen kubischen Punktverwandtschaften mit allgemeinen Flächen 3. Ordnung.

Es kann mit Verwendung des nunmehr Bewiesenen gezeigt werden, daß die durch 3 Polaritäten, d. h. involutorische Korrelationen bestimmte involutorische Verwandtschaft die einzige in beiderlei Sinn kubische ist, solange wir noch allgemeine Flächen 3. Ordnung voraussetzen.

Es sei zwischen 2 Räumen Σ, Σ' eine involutorische (3,3) Verwandtschaft hergestellt; dann entspricht einem Punkte X des Raumes Σ ein Punkt X′ von Σ', und wenn wir den ersten zu Σ' gehörig betrachten und dementsprechend mit Y′ bezeichnen, so ist ihm in Σ wiederum der Punkt X′, der jetzt mit Y zu bezeichnen ist, zugeordnet. Stellen wir uns nun 2 Ebenen $\begin{pmatrix} \alpha_1 = \beta'_1 \\ \alpha_2 = \beta'_2 \end{pmatrix}$ und die entsprechenden Homaloide $\begin{pmatrix} F'^3\alpha_1 = F^3\beta'_1 \\ F'^3\alpha_2 = F^3\beta'_2 \end{pmatrix}$ vor, so gilt vermöge des involutorischen Charakters der Transformation diese punktweise Zuordnung in beiden Räumen zugleich, d. h. den Punkten der 2 Ebenen entsprechen die Punkte der Homaloide eindeutig in der gleichen Zuordnung, ob wir die Ebenen nun zu Σ oder Σ' gehörig betrachten.

Nun kann aber jede (3,3) Verwandtschaft und infolgedessen auch diese involutorische durch 3 räumliche Korrelationen erzeugt werden. Zu einem Punkte X ergibt sich X′ als Schnittpunkt dreier Ebenen in Σ' und zu Y′ erhält man ebenso Y als Schnitt dreier Ebenen von Σ. Analog wie in dem vorausgehenden Beweise stellen wir jede Korrelation durch reziproke Zuordnung zweier ebener Systeme und zweier Bündel her. Seien die ebenen Systeme einmal α_1 und α_2, so können wir die Wahl der 6 Bündelzentren $P'_1\, P'_2\, P'_3$ und $Q'_1\, Q'_2\, Q'_3$ in der angegebenen Weise treffen. Nun seien diese 2 Ebenen aber mit β'_1 und β'_2 bezeichnet; die Homaloide $F^3\beta'_1$ und $F^3\beta'_2$ sind identisch mit den vorigen $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$ und entsprechen Punkt für Punkt den 2 Ebenen in ganz derselben Weise in Raume Σ wie vorhin im Σ'. Wir wählen jetzt als die 6 Bündelzentren in Σ die nämlichen 6 Punkte und erhalten eine

zweite (3,3) Verwandtschaft, in der den Punkten von β'_2 und β'_3 die Punkte der 2 Homaloide $F^3\beta'_1$ und $F^3\beta'_2$ in der gleichen Weise entsprechen, wie in der vorigen Transformation. Daraus ergibt sich die Identität dieser beiden Transformationen, sodaß also beide die gleiche involutorische (3,3) Verwandtschaft vermitteln. Die 3 Korrelationen in jedem der beiden Fälle sind aber derart, daß einmal die Punktfelder von Σ auf die Ebenen von Σ' bezogen sind, während das anderemal die nämlichen Punkte als zu Σ' gehörig betrachtet werden und die nämlichen Ebenen dem Raume Σ zugehören. Je 2 der Korrelationen sind also involutorisch, d. h. wir haben 3 räumliche Polaritäten vor uns. Wenn also eine (3,3) Verwandtschaft involutorisch ist, so kann sie stets durch 3 involutorische Korrelationen, d. h. durch 3 Polaritäten erzeugt werden!

Die allgemeinste involutorische (3,3) Verwandtschaft ist also die schon lange bekannte Transformation, die durch die Gesamtheit der in Bezug auf 3 Flächen 2. Ordnung oder überhaupt auf das durch dieselben bestimmte F^2-Bündel, konjugierten Punktepaare vermittelt wird. In der analytischen Darstellung kommen wir zu ihr, wie bekannt ist, wenn in den 3 bilinearen Gleichungen der Art I die Kœffizienten $a_{ik} = a_{ki}$ sind. Die F-Kurve 6. Ordnung in dieser Transformation ist der Ort der Spitzen der in dem Bündel vorkommenden Kegel 2. Ordnung. Als spezielle Fälle sind hier die 2 interessanten Verwandtschaften zu erwähnen, die eine, in der die Flächen des F^2-Bündels alle durch dieselbe Raumkurve 3. Ordnung gehen, die andere, in der das Bündel durch 3 Ebenenpaare bestimmt ist.[10])

§ 5. Die monoidalen involutorischen Raumtransformationen vom 3. Grade.

Nach den allgemeinen Flächen 3. Ordnung kommen diejenigen mit einem oder mehreren Doppelpunkten und endlich die mit einer Doppelgeraden, d. h. die kubischen Regelflächen in Betracht. Wenn wir Verwandtschaften mit Flächen dieser Voraussetzung untersuchen, so sind diese Doppelelemente allen Flächen des Gebüsches gemeinsam, fundamental, denn es kann nicht jede Fläche außerhalb der festen Elemente noch einen Doppelpunkt besitzen.[11]) Somit sind derartige involutorische Verwandtschaften vom Grade $n = 3$ monoidale Trans-

[10]) Doehlemann, Geom. Transformationen. II. S. 301.
[11]) Doehlemann, Geom. Transformationen. II. S. 309.

formationen, da alle Flächen des Gebüsches einen, d. h. mindestens einen, $(n-1)=2$fachen Punkt, der also notwendig gemeinsam ist, besitzen.

Diese Gruppe von involutorischen Verwandtschaften ist von Montesano erschöpfend untersucht.[12]) Der Bündel von Strahlen durch den $(n-1)$fachen Punkt stellt eine Kongruenz 1. Ordnung vor, der in der involutorischen Verwandtschaft wieder eine Strahlenkongruenz 1. Ordnung entsprechen muß. Da es aber außer dem zentrischen Bündel nur noch 2 Arten von Strahlenkongruenzen 1. Ordnung gibt, nämlich das Doppelsekantensystem der Raumkurve 3. Ordnung und das System von Strahlen, das eine rationale Kurve m ter Ordnung und deren $(m-1)$fache Sehne zu Leitlinien besitzt, so gibt es von diesem Gesichtspunkte aus 4 wesentliche Spezies der monoidalen involutorischen Transformationen. Mit diesen allgemeinen Untersuchungen sind auch die kubischen Verwandtschaften dieser Art erledigt. Montesano unterzieht auch diejenigen involutorischen Transformationen seiner Betrachtung, in welchen den Ebenen des Raumes Flächen n ter Ordnung mit einer $(n-1)$fachen Geraden entsprechen. Damit erledigt sich insbesondere auch der Fall der Regelfläche 3. Ordnung.

§ 6. Darstellung monoidaler involutorischer Raumverwandtschaften durch 3 räumliche Polaritäten.

Wir wollen uns fragen, welche Ergebnisse nun die in § 3 und § 4 angewandte geometrische Beweisführung für die nach Montesano in 4 Spezies gruppierten monoidalen Transformationen liefert.

Von Montesano selber wurde schon über die 4. Spezies bemerkt, daß sie sich aus der allgemeinen (3,3) Verwandtschaft ergibt, wenn in einer solchen die Fundamentalsysteme der beiden aufeinander bezogenen Systeme identisch sind und das homaloidische Flächensystem aus denjenigen Flächen 3. Ordnung besteht, welche durch eine ebene Kurve K^3 mit Doppelpunkt und durch eine solche kubische Raumkurve H^3 gehen, die der K^3 im Doppelpunkt und in 2 weiteren Punkten begegnet. K^3 und H^3 setzen die F-Kurve 6. Ordnung zusammen. Den Punkten der K^3 entsprechen die Erzeugenden des Kegels, der H^3 aus O projiziert, den einzelnen Punkten der H^3 hingegen sind die Erzeugenden einer Regelfläche 4. Ordnung zugeordnet, die von denjenigen Doppelsekanten von H^3 gebildet wird, die K^3 zur Leitlinie haben. a sei eine

[12]) Lomb. Ist. Rend. Ser. 2. Vol. 21. S. 579.

dieser Geraden, A der homologe Punkt. Der Ebene τ von K^3 entspricht der Punkt O. Die Geraden a sind bewegliche dreifache Sekanten der F-Kurve 6. Ordnung, die den beweglichen Punkten der Art A der F-Kurve entsprechen. Den übrigen Punkten, der Art B (die auf K^3 liegen), derselben entsprechen durch O gehende dreifache Sekanten b. Wenn auch nicht die Trisekanten b, so sind doch die der Art a für unsere frühere Methode der Beweisführung verwendbar. Wir erhalten den 2 durch a laufenden Ebenen homologe Flächen 3. Ordnung mit den Doppelpunkten O und A. α_1 z. B. schneide τ noch in c, dem der Doppelpunkt O entspricht; dem a entspricht A, dem Schnittpunkte $S = a \times c$ aber, als Punkt von K^3 der Strahl $\overline{OA}$. Die 3 eine solche hier auftretende Fläche 3. Ordnung erzeugenden kollinearen Ebenenbündel sind in der Weise reziprok auf die Ebene α_1 bezogen, daß den zweimal 3 durch die Punkte A und O in ihnen festgelegten Ebenenbüscheln die Punktreihen von a bzw. c entsprechen. Der weitere Gang des Beweises ist ganz analog dem allgemeinen Falle und es ist damit gezeigt, daß die vorliegende Verwandtschaft durch 3 spezielle involutorische Korrelationen zu erzeugen ist.

Wir gehen zu den involutorischen monoidalen Transformationen der 1. Spezies über. Hiebei sei zunächst die Strahlinvolution des Doppelpunktes O eine harmonische Homologie.[13]) Dem O entspricht eine F-Fläche 2. Ordnung, die F-Kurve ist 6. Ordnung und ihre Punkte derart gepaart, daß stets dem einen davon der Strahl entspricht, der den andern aus O projiziert. Die Projektionsstrahlen sind zwar dreifache Sekanten der F-Kurve, jedoch für uns insofern nicht verwendbar, als einer durch sie geführten Ebene gar keine Fläche 3. Ordnung entspricht. Es bieten sich außerdem nur noch die Geraden der F-Fläche dar, die dem O entspricht. Jede derselben wird nach O abgebildet. Führt man eine Ebene α durch eine solche (a), so schneidet sie die F-Fläche in einer weiteren Geraden b, der ebenfalls O zukommt. Es sei nun einmal angenommen, daß die Verwandtschaft irgendwie durch 3 Polaritäten erzeugt werden kann. Dann muß ein Punkt P′ des Σ-Raumes, dem P von Σ entspricht, als Schnittpunkt dreier Ebenen entstehen, die dem P in den 3 Polaritäten zugeordnet sind. Dem Punktfelde α sind aber eindeutig die Punkte einer $F'^3\alpha$ zugewiesen, in den 3 Polaritäten jedoch 3 zu ihm reziproke Bündel. Diese letzteren erzeugen $F'^3\alpha$, sodaß notwendig die Zentren auf der Fläche liegen. Den Punkten der Geraden a nun entspricht gemäß der Transformation der Punkt O, in den 3 Polaritäten sind ihnen die Ebenen der 3 Büschel, deren Axen

[13]) Martinetti: Lomb. Ist. Rend. Ser. 2. Vol. 18. S. 132—142.

von den Zentren nach O laufen, zugeordnet. Aber auch die Punkte der Geraden b sind nach O abgebildet, sodaß in den Polaritäten auch diesen die Ebenen jener Büschel entsprechen müßten. Da somit diese 3 Büschel zu 2 verschiedenen Punktreihen des Feldes α homolog sich ergeben müßten, sonst aber zu keinem Punkt des Punktfeldes α, so bleibt die Eindeutigkeit der Zuordnung nicht gewahrt und es kann auch keine Ausartung der korrelativen Beziehung vorliegen. Die Beziehung zwischen α und den 3 Bündeln kann keine korrelative sein. Die vorliegende Verwandtschaft ist also nicht durch 3 Polaritäten herstellbar. Auf ganz analogem Wege könnte man auch zeigen, daß die hier in Frage kommende nicht involutorische monoidale Transformation nicht mit der allgemeinen (3,3) Verwandtschaft identifiziert werden kann.

In der monoidalen involutorischen Verwandtschaft der 1. Spezies sei die Strahlinvolution des Punktes O eine quadratische.

Sie besitzt alsdann 3 Hauptstrahlen h_1 h_2 h_3, die der F-Kurve 6. Ordnung der Transformation angehören. Der Rest ist eine ebene Kurve 3. Ordnung, die jenen 3 Strahlen begegnet. Für unseren bekannten Beweis hier verwendbare dreifache Sekanten der R^6 wären von vornherein nur die Geraden der Ebene τ dieser Kurve 3. Ordnung. Sei a eine solche und α_1 und α_2 die durch sie geführten 2 Ebenen. α_1 schneidet z. B. die Ebene $\overline{h_2\ h_3}$, die in der Strahlinvolution des Punktes O dem h_1 entspricht, längs einer Geraden b. Jedem Punkte von b nun entspricht das ganze h_1 in der involutorischen Raumverwandtschaft; ein solcher Punkt P_1 entstehe als Schnitt von P_1O mit irgend einer Ebene, der homologe ergibt sich als der Schnitt von h_1 mit dem betreffenden Monoid Φ^3, das aber h_1 ganz enthält.

Denkt man nun $F'^3\alpha_1$, das dem α_1 entspricht durch 3 (unter sich kollineare) Ebenenbündel erzeugt, so kann man wohl jedem Punkte von α_1 die 3 Ebenen zuweisen, welche den homologen Punkt erzeugen, doch kann diese Beziehung, welche damit zwischen dem Punktfeld α_1 und jedem der 3 Ebenenbündel geschaffen ist, keine Korrelation sein. Den Punkten von b ist ja stets ein und dieselbe Ebene, nämlich die, welche h_1 projiziert, zugeordnet und analoges trifft für die 2 Schnittgeraden mit den Ebenen $\overline{h_1\ h_2}$ und $\overline{h_1\ h_3}$ zu. Daraus ist zu erkennen, daß auch eine Transformation dieser Art nicht durch 3 Polaritäten vermittelt werden kann.

Die Involution 1. Spezies mit einer Strahlinvolution 3. Ordnung in O, also mit 4 einfachen und 1 doppeltem F-Strahle kann nicht existieren, da sonst 2 Flächen des Systems nicht in einer beweglichen Kurve 3. Ordnung sich begegnen können.

Die 2. Spezies nach Montesano führt zu zwei Fällen der involutorischen Raumverwandtschaft. Da $n = 2k-1 = 3$ ist, so folgt $k = 2$ und wegen $2(k-1) \geq m$ kann m nur entweder $= 1$ oder $= 2$ sein. Wir verfolgen die zwei Möglichkeiten gesondert. Die Montesanoschen Untersuchungen liefern folgende Einzelheiten, wenn an den dort eingeführten Bezeichnungen festgehalten wird:

I.) Ist $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_1$ eine Gerade, so wird die F-Kurve C ein Kegelschnitt. Die F-Kurve 6. Ordnung der kubischen Flächen besteht aus d, $\mathcal{A}_1$ und C, sowie den Strahlen a_1 und a'_1. Die F-Flächen sind: Die Regelfläche $[C^2 d\mathcal{A}]$ 2. Grades, die Ebenen $\overline{a_1 \mathcal{A}_1}$, $\overline{O\mathcal{A}_1}$, $\overline{Oa'_1}$, $\overline{da_1}$, sowie die Ebene des Kegelschnittes C^2. Die Jakobische Fläche ist somit vom Grade 8, da die letzte Ebene doppelt zu zählen ist. Diese Ebene von C^2 entspricht dem Punkte O, den Punkten von $\mathcal{A}_1$ entsprechen die Erzeugenden der Regelfläche $[C^2 d\mathcal{A}]^2$. (Hiefür folge der Beweis: Den Strahlen $O\mathcal{A}_1$ der Kongruenz O sind die Strahlen der Kongruenz Q homolog, welche C^2 zur Leitlinie haben, also die Erzeugenden der Regelfläche $[\mathcal{A} dC^2]$. Durch einen Punkt P von $\mathcal{A}$ nun gehen die ∞ vielen Strahlen Pd der Kongruenz Q, welchen die Strahlen des Büschels O in derjenigen Ebene zugewiesen sind, welche in der Ebeneninvolution von d dem $\overline{Pd}$ entsprechen. Man fasse also P auf als Schnittpunkt des Strahles OP der Kongruenz O mit den ∞ vielen Strahlen Pd der Kongruenz Q. Somit trifft auch die in Frage kommende Erzeugende von $[\mathcal{A} dC^2]$, nämlich die dem OP zugewiesene, alle Strahlen des Büschels O in der sich ergebenden Ebene, d. h. diese Ebene geht durch jene Erzeugende und es wird demgemäß diese ganze Gerade als dem P entsprechend gefunden.)

Den Punkten von d sind die Strahlen von P in der Ebene $\overline{\mathcal{A}_1 a'_1}$ zugeordnet, den Strahlen von O in $\overline{O\mathcal{A}}$ sind die Punkte der C^2 homolog. Ferner entsprechen den Punkten von a_1 die Strahlen von O in $\overline{Oa'_1}$ und den Punkten von a'_1 die Strahlen des Punktes B_1 in der Ebene $\overline{da_1}$, wobei $B_1 = \mathcal{A}_1 \times \overline{da_1}$.

Diese Situation repräsentiert sich als ein Spezialfall der Spezies 4. K^3 besteht hier aus $(C^2 + a_1)$, das H^3 zerfiel in d, $\mathcal{A}_1$ und a'_1.

Als dreifache Sekanten sind hier zum Zwecke unseres Beweises die Regelgeraden von $[C_2 \mathcal{A} d]^2$ verwendbar. a sei eine solche, α_1 und α_2 2 Ebenen durch sie. a enthält 3 Punkte (1, 2, 3), denen die Geraden I,II,III entsprechen, die von A ausgehen, wenn A der homologe Punkt zu a ist. Erzeugt man $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$ durch Ebenenbündel und bezieht die Punkte von α_1 und α_2 auf die Ebenen derselben, sodaß die zu einem Punkte P homologen Ebenen den dem P zugehörigen

Punkt P′ erzeugen, so ist die Zuordnung eine Korrelation. Den Punkten von a entsprechen die Ebenen der Büschel, deren Axen nach A laufen. Den Punkten von b_1 und b_2 $\left(\equiv \begin{matrix}\alpha_1 \times J_1 \\ \alpha_2 \times J_1\end{matrix}\right)$ ebenso die Ebenen der Büschel, deren Axen durch O gehen. Dem Punkte 1 gehört die durch $\overline{OA}$ geführte Ebene zu. Auch im übrigen ist die Zuordnung eindeutig. Die α_1 und α_2 begegnen dem $[C^2 \Delta d]^2$ zwar noch in einer weiteren Geraden, aber die einzelnen Punkte derselben sind zu den Punkten der Δ_1 homolog. Ähnlich sind auch den Punkten der Schnittgeraden mit den übrigen 4 F-Ebenen $\underline{\overline{a'_1 \Delta}}$, $\underline{\overline{O \Delta_1}}$, $\underline{\overline{Oa'_1}}$, $\underline{\overline{da_1}}$ die Punkte auf bzw. d, C^2, a_1 und a'_1 zugeordnet und zwar einem Punkte eindeutig wieder ein Punkt. Somit folgt auch hierin die Beziehung zu den erzeugenden Ebenenbündeln eindeutig. Auf dieselbe Weise wie beim allgemeinen Beweis in § 3 zeigt sich die Zuordnung der Punktfelder α_1 und α_2 zu den 2×3 Ebenenbündeln korrelativ und auch die weitere Beweisführung wäre ähnlich. Diese spezielle involutorische Verwandtschaft läßt sich demnach durch 3 Polaritäten erzeugen.

II.) Ist $\Delta_m = \Delta_2$, so wird die F-Kurve C von der 3. Ordnung. Die totale F-Kurve setzt sich aus d, Δ_2 und C^3 zusammen, die F-Flächen aus der Regelfläche 3. Ordnung, die Δ_2, d und C^3 als Leitlinien besitzt, ferner aus der Ebene des Δ_2, dem Kegel $[O \Delta_2]$ 2. Ordnung und der doppelten zu zählenden Ebene von C^3. Diese letztere Ebene entspricht dem O. Die Erzeugenden der kubischen Fläche entsprechen den Punkten der Δ_2, den Punkten der C^3 sind die Strahlen des Kegels $(O \Delta_2)^2$ homolog, und den Punkten der d entsprechen die Strahlen des Punktes P in der Ebene von Δ_2 (wobei $P \equiv C^3 \times$ Ebene von Δ_2).

Man erkennt auch diese Transformation als einen besonderen Fall der Spezies 4, H^3 ist in $(\Delta_2 + d)$ zerfallen.

Als dreifache Sekanten können hier für unsern Beweis die Geraden a von P in der $\Delta_2 =$ Ebene benutzt werden. Die zwei Flächen $F'^3\alpha_1$ und $F'^3\alpha_2$ sind solche mit gemeinsamen 2 Doppelpunkten O und A. [A = beweglichen Punkt von d] Im übrigen ist die Situation ähnlich dem vorigen Fall. Auch diese Verwandtschaft kann somit durch 3 Polaritäten vermittelt werden.

Die 3. Spezies der monoidalen involutorischen Verwandtschaft liefert für $n = 3$ folgendes: Die F-Kurve 6. Ordnung besteht aus 6 Geraden, 3 davon begegnen sich in O, 3 in P, den Doppelpunkten. Die F-Fläche 8. Ordnung setzt sich zusammen aus den Ebenen $\underline{\overline{Oa'_1}}$,

$\overline{Oa'_2}$ und $\overline{Pa_1}$, $\overline{Pa_2}$, sowie den doppelt zu zählenden Ebenen $\overline{a_1a_2}$ und $\overline{a'_1a'_2}$. Von den letzteren entspricht die erste dem O, die zweite dem P. Jedem einzelnen Punkt von d entspricht das ganze C_1. Den Punkten von a_1 entsprechen die Strahlen des Punktes O in $\overline{Oa'_1}$, analog den Punkten von a_2 die Strahlen von O in $\overline{Oa'_2}$. Den Punkten von a'_1 resp. a'_2 sind ebenso die Strahlen des Punktes P in $\overline{Oa_1}$ bzw. $\overline{Oa_2}$ homolog.

Auch diese Verwandtschaft zeigt sich als ein spezieller Fall der Spezies 4, K^3 zerfiel in die 3 Geraden a_1, a_2, C; H^3 in d, a'_1 a'_2.

Die Geraden der Ebenen $\overline{a_1a_2}$ oder $\overline{a'_1a'_2}$ können zu unserem Beweise verwendet werden. Sei a eine solche, ihm entspricht O. 2 Ebenen α_1 und α_2 durch a werden auf 2 kubische Flächen mit den Doppelpunkten O und P abgebildet, die die Geraden I II III gemein haben. Die 2 Ebenen treffen die Ebene $\overline{a'_1a'_2}$ in b und b_1, die beide nach P abgebildet werden. Den einzelnen Punkten dieser 2 Geraden sind in den 3, die betr. F'^3 jeweils erzeugenden Ebenenbündeln jedoch tatsächlich die Ebenen dreier Büschel in eindeutiger Weise zugeordnet. So entsprechen z. B. den 3 Punkten 1, 4, (auf a'_2), 5, (auf a'_1) a'_1 von b die durch I ($\equiv$ d), IV, V gehenden Ebenen. Im übrigen ist der Gang des Beweises auch für diesen speziellen Fall ähnlich wie in den vorausgehenden. Auch diese Verwandtschaft kann mithin durch 3 Polaritäten vermittelt werden.

Eine monoidale, kubische, involutorische Raumverwandtschaft kann also unseren Untersuchungen gemäß durch 3 Polaritäten (die besonderen Bedingungen unterworfen sind) vermittelt werden, mit Ausnahme der zwei Fälle, welche die 1. Spezies der Montesano'schen Gruppierung liefert, der Fälle nämlich, in denen die Strahlen des Doppelpunktes O eine Involution bilden, die vom 1. oder 2. Grade ist.

Eine allgemeine involutorische Raumtransformation 4. Ordnung ist nicht bekannt. Als besonderer Fall sei außer den monoidalen und den nach Montesanos Theorem darauf zurückführbaren Verwandtschaften die durch Wiederholung einer quadratischen involutorischen Transformation hergestellte erwähnt. Man beziehe den Raum Σ involutorisch und quadratisch auf die Räume Σ' und Σ'', dann stehen diese letzteren beiden in einer involutorischen Verwandtschaft vom 4. Grade.

Es kann somit die Aufzählung der involutorischen Raumtransformationen nur bis zum 3. Grade vollständig gegeben werden.

Geht man nun auf die Untersuchung von Raumverwandtschaften vom 4. Grade über, so ist man von vornherein gezwungen, auf spezielle Flächen sich zu beschränken, da die eindeutige geometrische Abbildung einer Fläche 4. Ordnung nur unter besonderen Voraussetzungen möglich ist.

In den folgenden zwei Kapiteln wollen wir als Homaloide des einen Raumes solche Flächen 4. Ordnung voraussetzen, welche einen Doppelkegelschnitt besitzen. Nunmehr von der Möglichkeit einer involutorischen Transformation absehend, stellen wir uns die allgemeinere Aufgabe, die sämtlichen Raumverwandtschaften aufzusuchen, in denen das Gebüsch des einen Raumes aus Flächen dieser Art besteht.

In Kapitel II werden wir die Methode dieser Untersuchung an einem der möglichen Fälle ausführlich behandeln. Wir wählen diejenige Verwandtschaft, in der auch im zweiten Raume das homaloidische Gebüsch aus Flächen genannter Art besteht, so daß wir es mit einer (4,4) Verwandtschaft zu tun haben. Dieser Fall steht dem Kapitel I insofern nahe, als er für eine involutorische Verwandtschaft 4. Ordnung die notwendige Bedingung wäre.

Kapitel II.

Eine spezielle eindeutige Punktverwandtschaft im Raume, die in beiderlei Sinn vom 4. Grade ist.

---

§ 1. Geometrische Abbildung der Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt.

Die Fläche 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt, die wir künftig mit F^4_2 bezeichnen, kann durch die Kongruenz von Strahlen, welche den Doppelkegelschnitt und eine Gerade der Fläche in getrennten Punkten schneiden, auf die Ebene abgebildet werden.[14]) Die Abbildung stammt von Clebsch, der sie analytisch behandelte.[15])

[14]) Sturm, Geom. Verwandtschaft. IV. S. 306.
[15]) Crelle's Journal. Bd. 69. S. 142.

Nach einem von Cremona angegebenen Verfahren kann man von solchen eindeutigen Flächenabbildungen aus zu homaloidischen Flächengebüschen und von da zu Punkttransformationen des Raumes gelangen. Sturm verbesserte diese Methode [16]) und verwendete sie für die Aufsuchung von solchen Raumtransformationen, bei denen das Gebüsch des einen Raumes aus allgemeinen Flächen 3. Ordnung besteht.

Von der Abbildung eines Homaloids φ_α auf eine Ebene α'' ausgehend, gelangt man zu sämtlichen Raumtransformationen, in denen die Flächen des einen Gebüsches aus solchen φ_α bestehen. Man nimmt noch eine Fläche φ_β der gleichen Art hinzu, die mit φ_α ihre singulären Elemente gemeinsam hat, bestimmt das Schnittgebilde der zwei und dessen Abbildung in α''. Diese Bildkurve ist in einen festen und einen veränderlichen Teil zu zerlegen. Bildet der letztere ein homaloidales Netz, so kann man die Ebene α'' auf eine Ebene α' beziehen, wobei den Geraden derselben die variabeln Kurven von α'' entsprechen. Damit ist alsdann auch das Geradenfeld von α' auf eine gewisse Kurvenschar, die φ_α bedeckt, bezogen, und dieses Entsprechen geschieht gemäß einer birationalen Raumtransformation, in der α' und φ_α einander zugeordnet sind. Es ist das Geradenfeld in α' als Schnitterzeugnis der sämtlichen Ebenen des Σ'-Raumes auf α' zu denken, dem in Σ das Schnittkurvennetz des beweglichen φ_β mit dem fest gedachten φ_α entsprechend ist. Dem festbleibenden Teil der Bildkurve in α' gehört eine feste Kurve auf φ_α zu und diese ist die F-Kurve eines Gebüsches von Flächen φ_α. Im einzelnen Falle ist immer nachzuweisen, daß diese feste Kurve zusammen mit den gemeinsamen singulären Elementen ein homaloidisches Gebüsch von Flächen φ bestimmt. Indem wir nun dieses dreifach ∞ homaloidale Flächensystem, das einem Raume Σ angehören soll, dem Ebenenraum Σ' zuordnen, sodaß der Fläche φ_α die Ebene α' entspricht, haben wir eine birationale Raumverwandtschaft erhalten.

Wir betrachten also 2 Flächen 4. Ordnung der obengenannten Art, deren Doppelkegelschnitt d^2 gemeinsam ist. Sie mögen mit $F^4{}_2\alpha$ und $F^4{}_2\beta$ bezeichnet sein. Der weitere Schnitt ist alsdann eine Kurve der Ordnung $4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. $F^4{}_2\alpha$ werde nun samt der darauf verlaufenden Kurve 8. Ordnung C^8 in eine Ebene $'\Pi$ abgebildet dadurch, daß man die projizierende Strahlenkongruenz $[d^2, u]$ 1. Ordnung 2. Klasse mit der Ebene $'\Pi$ schneidet. F-Punkte der Abbildung sind zunächst $'L_1 \ldots 'L_5$, die Bilder der 5, das u treffenden Geraden von $F^4{}_2\alpha$.

[16]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vergg. Bd. 14. S. 18—24.

Ferner aber sind die Schnittpunkte $'D_1$ und $'D_2$ von d^2 und $'U$ von u mit der Ebene $'\Pi$ Hauptpunkte der Abbildung, indem den ersteren 2 die ebenen Kurven 3. Ordnung $K^3{}_{,D_1}$ und $K^3{}_{,D_2}$ entsprechen, die von den Ebenen $\overline{'D_1 u}$ und $\overline{'D_2 u}$ noch auf der Fläche ausgeschnitten werden; $'U$ aber ist das Bild der Raumkurve $C^3{}_{,U}$, die der Kegel $('Ud^2)$ außer d^2 und u mit $F^4{}_2\alpha$ gemein hat.[17]) Da jede Gerade durch einen Punkt von d^2, also insbesondere auch die 5 Gerade $l_1 \ldots l_5$, deren Bildpunkte $'L_1 \ldots 'L_5$ heißen, die Fläche $F^4{}_2\alpha$ noch in 2 Punkten treffen und dieselben Punkte der C^8 sind, so besitzt die Bildkurve von C^8 in $'\Pi$ die Punkte $'L_1 \ldots 'L_5$ zu Doppelpunkten. Um die Ordnung dieser Bildkurve zu finden, müssen wir die projizierende Regelfläche $F^x{}_r$ der Ordnung x betrachten. C^8 trifft, wie jede Ebene, auch die von d^2 8mal und dies sind 8 Punkte von d^2. u schneidet $F^4{}_2\beta$ in dem Punkte $S \equiv (u \times d^2)$ zweimal und außerdem noch in den Punkten M und N, die auf C^8 liegen. Es fragt sich, wie vielfach u für $F^x{}_r$ ist! Von einem nicht auf $l_1 \ldots l_5$ gelegenen Punkte O von u aus denke man sich die 2 Kegel (Od^2) und (OC^8) der Ordnung 2 resp. 8. u ist einfacher Strahl des ersten, doppelter des letzteren, da ja M und N auf u liegen. Die zwei Kegel treffen sich somit noch in $2 \cdot 8 - 2 = 14$ Strahlen außer u. Davon sind aber die 8 nach den Schnittpunkten $[C^8 \times d^2]$ laufenden in allgemeinen nicht projizierende Strahlen von Punkten der C^8; nur wenn der Strahl zufällig in der gemeinsamen Tangentialebene von C^8 und d^2 in diesem Schnittpunkt $[C^8 \times d^2]$ gelegen ist, trifft dies zu. Durch O gehen demnach nur 6 Regelstrahlen der $F^x{}_r$ und u ist 6fach für diese Fläche. Von einem Punkte P auf d^2 geht der Kegel 8. Ordnung (PC^8) und die Ebene $\overline{Pu}$ aus. Beide treffen sich in 8 durch P gehenden Geraden, die auch u schneiden. Aber nicht alle 8 sind projizierende Strahlen von C^8, denn die Strahlen PM und PN können i. a. keine solchen sein; sie müßten nämlich zufällig in der Ebene liegen, welche u mit den Tangenten von C^8 in M resp. N bestimmt. Nur 6 Regelstrahlen gehen somit durch P und d^2 ist auch 6fach für $F^x{}_r$. Die Ordnung x der Regelfläche bestimmen wir, indem wir den vollständigen Schnitt einer durch u geführten willkürlichen Ebene aufsuchen. Dieser besteht aus dem 6fachen u und aus den 6 Regelstrahlen, die durch die 6 durch den von S verschiedenen Schnittpunkt T der Ebene mit d^2 gehen. Ein anderer Schnitt ist nicht möglich, denn wäre Q ein weiterer Punkt von $F^x{}_r$ in dieser Ebene, so wäre $\overline{QT}$ ein projizierender Strahl von C^8, also eine 7. durch T gehende Regelgerade, was für den allgemeinen

[17]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 307.

Fall nicht eintreten kann. Somit besteht der vollständige Schnitt aus 12 Geraden und F^x_r ist von der Ordnung $x = 12$. Das Bild von C^8 in $'\Pi$ ist also eine Kurve 12. Ordnung, mit den 3 sechsfachen Punkten $'D_1$, $'D_2$ und $'U$ und den 5 Doppelpunkten $'L_1 \ldots 'L_5$. Die 3 sechsfachen Punkte erkennt man auch auf folgendem Wege: Dem $'D_1$ entspricht die ebene Kurve $K^{3}{}_{,D_1}$. Diese trifft $F^4{}_{2,\beta}$ in $3 \cdot 4$ Punkten. Davon gehen aber ab: S, in welchem $K^{3}{}_{,D_1}$ die $F^4{}_{2,\beta}$ zweimal trifft und die übrigen 2 Punkte, in denen $K^{3}{}_{,D_1}$ die Ebene von d^2 und somit d^2 selbst schneidet. In jedem derselben trifft $K^{3}{}_{,D_1}$ die $F^4{}_{2,\beta}$ zweimal, sodaß nur noch 6 Punkte $K^{3}{}_{,D_1} \times F^4{}_{2,\beta}$ d. h. $K^{3}{}_{,D_1} \times C^8$ vorhanden sind, welche nicht auf d^2 liegen. Da $K^{3}{}_{,D_1}$ nach $'D_1$ abgebildet wird, so geht die Bildkurve von C^8 sechsmal durch $'D_1$. Ebenso oft geht sie durch $'D_2$. Dem $'U$ entspricht $C^{3}{}_{,U}$ auf $F^4{}_{2}\alpha$; diese Kurve besitzt analog 3 Punkte auf d^2, in denen sie $F^4{}_{2}\beta$ doppelt trifft; somit liegen noch 6 nicht auf d^2 befindliche Punkte von C^8 auf $C^{3}{}_{,U}$ und werden mit diesem nach $'U$ abgebildet. Damit wird auch $'U$ sechsfach für diese Kurve 12. Ordnung.

Wir beziehen nun $'\Pi$ mittelst einer quadratischen Transformation auf eine Ebene α'', sodaß $'D_1$, $'D_2$ und $'U$ die Hauptpunkte von $'\Pi$ sind. Die Geraden $l_1 \ldots l_5$ haben dann die Punkte $L''_1 \ldots L''_5$ zu Bildern, d^2 eine durch diese Punkte und den Hauptpunkt U'' gehende Kurve 3. Ordnung. Unsere Aufgabe ist, das Bild der C^8 in dieser Ebene α'' aufzusuchen. Es ist dies eine Kurve $12 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 6$. Ordnung: K''_6.

Da die Gerade $\overline{'D_1\, 'D_2}$ außer in diesen 2 sechsfachen Punkten die Bildkurve 12. Ordnung in $'\Pi$ nicht trifft, und $'D_1$ und $'D_2$ F-Punkte der quadratischen Transformation sind, so geht K''_6 nicht durch U''; und ebenso nicht durch D''_1 und D''_2, die anderen 2 Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft in α''. Also die Gerade $\overline{D_1''\, D_2''}$ z. B. schneidet K''_6 in 6 nicht fundamentalen Punkten. In der Tat ist ja $\overline{D''_1\, D''_2}$ die dem $'U$ entsprechende F-Gerade von α'' und die 6 Punkte sind die Bilder der obenerwähnten 6 Punkte von C^8, die auf $C^{3}{}_{,U}$ gelegen sind. Das Bild der vollständigen Schnittkurve C^8 ist in α'' also eine Kurve K''_6 sechster Ordnung mit 5 Doppelpunkten $L_1'' \ldots L_5''$. Zu diesem Ergebnis führt auch die bei Clebsch [18]) angegebene Formel $N = 3n - \Sigma\alpha$. $8 = 3 \cdot n - (2 + 2 + 2 + 2 + 2)$. $n = 6$, wobei n die Ordnung der Bildkurve, N die der Raumkurve bedeutet.

[18]) Crelle's Journal. Bd. 69. S. 142.

§ 2. Netze von Kurven 4. Ordnung auf der Fläche und deren Abbildung in der Ebene.

Man hat jetzt K''_6 so in einen festen und einen variabeln Bestandteil zu zerlegen, daß letzterer ein homaloidisches Netz bilden kann.

Unsere Absicht geht, wie bereits erwähnt, dahin, zunächst die Verwandtschaften aufzusuchen, die in beiderlei Sinn vom 4. Grade sind und in welchen das Gebüsch, wenigstens in einem Raume aus solchen Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt besteht. Damit den Ebenen des ersten Raumes auch Flächen 4. Ordnung entsprechen, ist nötig, daß der veränderliche Teil des Schnittes zweier F^4_2 im 1. Gebüsche eine Kurve 4. Ordnung vom Geschlechte 0, also 2. Art ist. Denn diesen Kurven werden die Geraden des 2. Raumes entsprechen und nach dem Riemann'schen Satze können ja nur solche Kurven eindeutig aufeinander abgebildet werden, die gleiches Geschlecht besitzen. Zwei F^4_2 des Gebüsches werden ja in 2 Ebenen transformiert und ihr variabler Schnitt 4. Ordnung, der mit ${}^{\nu}C^4_0$ bezeichnet sei, in deren Schnittgerade. Eine beliebige Ebene des 1. Raumes begegnet alsdann jeder ${}^{\nu}C^4_0$ genau so oft, als das entsprechende Homaloid 4. Ordnung der homologen Geraden. Von C^8 muß sich also eine solche ${}^{\nu}C^4_0$ abspalten, sodaß eine weitere feste Kurve 4. Ordnung bleibt. Wir wollen einstweilen davon absehen, daß dieser Restschnitt 4. Ordnung auch auf andere Weise entstehen, oder daß diese neue F-Kurve 4. Ordnung zerfallen kann.

Der feste Teil zweier Flächen des Gebüsches besteht also außer d^2 noch in einer Kurve 4. Ordnung. Wir werden alle Arten von Kurven 4. Ordnung, die auf einer F^4_2 verlaufen und ihre Abbildungen in der Ebene aufsuchen; die Abbildung von C^8, also K''_6 haben wir alsdann in solche und in einen variablen Teil zu zerlegen, sodaß letzterer ein homaloidales Netz bildet. Ist n die Ordnung der Bildkurve und $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ die Zahl der Vielfachheit der F-Punkte $L_1'' \ldots L_5''$ auf ihr, so ist die Ordnung N der Raumkurve selbst nach Clebsch: $N = 3n - \Sigma\alpha$. Der Kürze halber bedienen wir uns dieser Formel. Setzen wir $N = 4$, so können wir sämtliche Fälle erwägen. Ein Zerfall der Bildkurve bedingt auch einen Zerfall der Raumkurve. Behalten wir dies im Auge, so finden wir nach Clebsch viererlei Kurven 4. Ordnung auf einer F^4_2 bei unserer Abbildungsmethode.

$n = 0$ und $n = 1$ führen zu keinem Ziele, d. h. Kurven 4. Ordnung können sich hier nicht in einen Punkt oder eine Gerade abbilden.

$n = 2$ zieht $\Sigma\alpha = 2$ nach sich. Da der Fall, daß ein $\alpha = 2$, die übrigen $= 0$, ein Zerfallen der Bildkurve 2. Ordnung zur Folge hat, so bleibt nur die eine Möglichkeit:

1. $n = 2$. Zwei der $\alpha = 1$, die anderen $= 0$: Es gibt Kurven 4. Ordnung auf $F^4{}_2$, welche sich in Kegelschnitte abbilden, die durch 2 der F-Punkte L''_i gehen.

$n = 3$ erfordert $\Sigma\alpha = 5$. Da 2 der $\alpha = 2$, ein $\alpha = 1$, die übrigen $= 0$, ein Zerfallen der Bildkurve 3. Ordnung bedingt, so bleiben die 2 Möglichkeiten:

2. $n = 3$. Alle 5 $\alpha = 1$. Kurven 4. Ordnung, die sich in solche 3. Ordnung abbilden, die durch alle L'' einmal hindurchgehen.
3. $n = 3$. Ein $\alpha = 2$. Drei der $\alpha = 1$, eines $= 0$. Die Bilder sind Kurven 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt in einem der L'', durch 3 andere einmal, durch eines überhaupt nicht hindurchgehend.

$n = 4$ erfordert $\Sigma\alpha = 8$. Hier ergibt sich die Möglichkeit:

4. 3 der $\alpha = 2$. 2 der $\alpha = 1$. Die Bilder sind Kurven 4. Ordnung mit 3 doppelten und 2 einfachen Punkten in den L''.

Alle übrigen Aufteilungen von $\Sigma\alpha$ ziehen den Zerfall der Bild- und somit auch der Raumkurve 4. Ordnung selbst nach sich. Diese 4 Fälle umfassen die von Clebsch angegebenen Raumkurven 4. Ordnung 1. und 2. Art.[19])

Wenn sich nun von C^8 eine solche feste Kurve 4. Ordnung und somit von K''_6 die Abbildungskurve derselben, welche also viererlei Art sein kann, abspaltet, so müssen wir zusehen, ob die Bildkurve der übrig bleibenden veränderlichen Kurve 4. Ordnung ein homaloidales Netz bilden kann. Wir prüfen die Fälle einzeln:

1. Von K''_6 denke man einen festen Kegelschnitt ${}^1K''_2$ abgetrennt, der durch 2 der F-Punkte L'' geht. Es bleibt eine Kurve ${}^vK''_4$ 4. Ordnung übrig, die in den übrigen 3 L'' Doppelpunkte, in jenen 2 aber einfache Punkte besitzt. Wollen wir diese Ebene α'' später auf eine Ebene α' abbilden, sodaß den Geraden der letzteren diese Kurven ${}^vK''_4$ entsprechen, so müssen diese ein homaloidales Kurvensystem 4. Ordnung bilden, das mindestens 3 zweifache und 2 einfache Hauptpunkte besitzt. Ein solches Netz gibt es. Es tritt noch ein weiterer einfacher Hauptpunkt auf, der mit M'' bezeichnet sein möge. Die den veränder-

[19]) Crelle's Journal. Bd. 69. S. 142.

lichen ${}^{v}K''_0$ zugehörigen Raumkurven auf $F^4_2\alpha$ sind in der Tat 4. Ordnung und von der 2. Art: Ordnung $N = 3 \cdot 4 - [3 \cdot 2 + 2 \cdot 1] = 4$. Geschlecht $= 0$, da das von ${}^{v}K''_4 = 0$. Diese veränderlichen Raumkurven mögen mit ${}^{v}C^4_0$ benannt sein. Den festen Teilen ${}^{f}K''_2$ und M'' von K''_6 in α'' entsprechen als feste Teile der C^8, d. h. der Schnittkurve von $F^4_2\alpha$ mit dem beweglichen $F^4_2\beta$, eine Raumkurve 4. Ordnung ${}^{f}C^4_0$ der 2. Art und der Punkt M. Es wird nun behauptet, daß der Doppelkegelschnitt d^2, zusammen mit ${}^{f}C^4_0$ und dem Punkte M die Grundelemente eines homaloidischen Gebüsches von Flächen F^4_2 darstellen. Bevor wir den Beweis aufnehmen, wollen wir uns noch mit den übrigen 3 Arten des Kurvennetzes in α'' beschäftigen.

2. Von K''_6 möge sich eine feste Kurve 3. Ordnung lostrennen, die durch die 5 L'' geht. Der Rest ist eine ebenfalls durch jedes L'' einmal gehende Kurve 3. Ordnung ${}^{v}K''_3$. Diese letztere müßte nun ein homaloidisches Netz bilden können, das mindestens 5 einfache Hauptpunkte $L''_1 \ldots L''_5$ besitzt. Ein derartiges Netz gibt es jedoch nicht. Wir gelangen also durch diese Art von Kurven auf der Fläche zu keiner Verwandtschaft.

3. Von K''_6 spalte sich nun eine Kurve 3. Ordnung ${}^{f}K''_3$ ab, die in einem der F-Punkte L''_k einen Doppelpunkt hat, durch 3 andere einmal, durch eines aber, L''_i, nicht hindurchgeht. Der Rest besteht aus einer Kurve ${}^{v}K''_3$ 3. Ordnung, die in jenem L''_i einen Doppelpunkt hat, durch die 3 von L''_i und L''_k verschiedenen F-Punkte je einmal, durch L''_k gar nicht geht. Soll ${}^{v}K''_3$ einem homaloidalen Netz angehören, so muß dasselbe in einem der F-Punkte einen doppelten, in 3 anderen einfache Hauptpunkte besitzen. Ein solches Netz gibt es; es besitzt einen weiteren Hauptpunkt M''. Den ${}^{v}K''_3$ sind tatsächlich veränderliche Raumkurven ${}^{v}C^4_0$ 4. Ordnung 2. Art zugeordnet. Ordnung $N = 3 \cdot 3 - (2 + 3 \cdot 1) = 4$. Geschlecht = Geschlecht von ${}^{v}K''_3 = 0$. Dem ${}^{f}K''_3$ entspricht auf der Fläche $F^4_2\alpha$ eine Kurve 4. Ordnung 2. Art ${}^{f}C^4_0$, dem M'' ein Punkt M, die zusammen mit dem Doppelkegelschnitt d^2 die Grundelemente eines homaloidischen F^4_2-Gebüsches darstellen. Hier ist also derselbe Beweis wie in 1. notwendig.

4. Endlich kann von K''_6 sich noch eine feste Kurve ${}^{f}K''_4$ 4. Ordnung absondern, die durch 3 der F-Punkte doppelt, durch 2 einfach läuft. Der als Rest bleibende Kegelschnitt ${}^{v}K''_2$ muß durch jene eben erwähnten 2 F-Punkte hindurchgehen, kann also ein homaloidales Netz durchlaufen, wenn noch ein fester Grundpunkt M'' existiert. Wieder sind die entsprechenden veränderlichen Raumkurven 4. Ordnung natür-

lich solche 2. Art. Die festen Teile bestehen aus einer sich in ${}^{f}K''_{2}$ abbildenden Kurve ${}^{f}C^{4}_{0}$ 4. Ordnung 2. Art, und dem Punkte M, die mit dem Doppelkegelschnitt, genau wie in den übrigen 2 brauchbaren Fällen, die Grundelemente eines homaloidalen Gebüsches bilden.

Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß die 3 erhaltenen Fälle nur durch die Art der Abbildung sich von einander verschieden zeigen, da sie lediglich zu einem einzigen Typus des F^{4}_{2}-Gebüsches Veranlassung geben. In der Tat kann man zeigen, daß die 3 Fälle eigentlich identisch sind: Bezeichnen wir nach R. Sturm die 16 Geraden der $F^{4}_{2}\alpha$ mit l_1, l_2, ... l_5, m_{12}, m_{13}, ... m_{45}, u, [entsprechend bei Clebsch: 1, 2, ... 16] so haben wir bei unserer Abbildung von $F^{4}_{2}\alpha$ neben dem Kegelschnitt d^2 die Gerade u als Leitlinie der projizierenden Strahlen gebraucht. Ebensogut kann man aber jede der 15 anderen zu diesem Zwecke benutzen. Wir wollen den Fall an einem Beispiel erörtern. Das Netz von 1. liege vor. Die variabeln Kurven ${}^{v}C^{4}_{0}$ treffen:

einmal: $l_1\, l_2$ [1, 2];
zweimal: $l_3\, l_4\, l_5$ [3, 4, 5];
nicht: $m_{34}\, m_{35}\, m_{45}$ [13, 14, 15];
einmal: $m_{15}\, m_{14}\, m_{13}\, m_{25}\, m_{24}\, m_{23}$ [9, 8, 7, 12, 11, 10];
zweimal: m_{12} [6] und endlich:
nicht: u [16],

wie sich aus der Abbildung schließen läßt. Nun wollen wir diese Fläche mitsamt dem darauf liegenden Kurvennetz der ${}^{v}C^{4}_{0}$ mit Hilfe einer anderen Strahlenkongruenz abbilden. Statt u soll l_4 Leitgerade sein! Alsdann werden die 5 Geraden u, m_{14}, m_{24}, m_{34}, m_{54} in F-Punkte ${}''U$, ${}''M_{14}$, ${}''M_{24}$, ${}''M_{34}$, ${}''M_{54}$ abgebildet, l_4 in den Kegelschnitt durch sie. Die veränderliche Raumkurve ${}^{v}C^{4}_{0}$ wird in eine Kurve projiziert, die durch ${}''U$, ${}''M_{34}$ und ${}''M_{54}$ nicht, durch ${}''M_{24}$ und ${}''M_{14}$ einmal hindurchgeht, was aus der obigen Tabelle folgt. Da auch hier eine analoge Formel $N = 3n - \Sigma\alpha$ gilt, so ergibt sich die Ordnung der Bildkurve = 2. Bei dieser Annahme bilden sich demnach die veränderlichen Kurven ${}^{v}C^{4}_{0}$ in ein Netz von Kegelschnitten ab, das 2 der F-Punkte zu Grundpunkten besitzt. Da der den Raumkurven gemeinsame Punkt M als Bild den 3. Hauptpunkt des Kegelschnittnetzes liefert, so hat sich somit die Situation von 4. ergeben.

Auch Fall 3. ergibt sich nur durch die Art und Weise der Abbildung von 1. verschieden. m_{15} sei einmal statt u der Leitstrahl der Abbildungsgeraden. Dann werden l_1, l_5, m_{23}, m_{24} und m_{34} fun-

damental und in die Punkte $''L_1$, $''L_5$, $''M_{23}$, $''M_{24}$, $''M_{34}$ abgebildet. Die Bildkurven der ${}^{\nu}C^4{}_0$ gehen, wie sich an Hand der Tabelle folgern läßt, durch $''L_5$ zweimal, durch $''L_1$, $''M_{23}$, $''M_{24}$ einmal, durch $''M_{34}$ aber gar nicht. Somit erhalten wir die Ordnung n derselben aus: $4 = 3 \cdot n - (2 + 3 \cdot 1)$ als $n = 3$. Die Bildkurven ergeben ein Netz von Kurven 3. Ordnung, das in einem der F-Punkte einen zweifachen, in dreien einen einfachen Hauptpunkt besitzt, während der weitere Hauptpunkt der Bildpunkt von M ist. Dies ist aber die Situation von 3.

Wir haben sonach erkannt, daß wir durch die 3 verschiedenen homaloidalen Kurvennetze in der Bildebene α'' zu ein und demselben Kurvennetz von ${}^{\nu}C^4{}_0$ auf der Fläche $F^4{}_2\alpha$ gelangen. Es gibt also nur diesen einzigen Typus eines solchen.

Wir haben ursprünglich die Möglichkeit zurückgestellt, daß der festbleibende Restschnitt 4. Ordnung, der sich von C^8 abspalten muß, auch auf andere Weise entstehen kann. Es könnte dies beispielsweise erreicht werden durch 4 windschiefe Gerade, durch 2 Kegelschnitte, durch 1 Kegelschnitt und eine Gerade, längs der sich alle Flächen des Gebüsches berühren usw.

Untersucht man nun alle Möglichkeiten, welche zu solch einem Restschnitt 4. Ordnung führen auf ähnliche Weise, wie das im vorliegenden allgemeinsten Falle geschehen ist, so erweisen sich die folgenden als brauchbar, indem sie ebenfalls zu einem homaloidalen $F^4{}_2$-Gebüsch Veranlassung geben: Der Restschnitt besteht

1. aus einer Raumkurve 3. Ordnung und einer einmal schneidenden Geraden;
2. aus 2 sich einmal treffenden Kegelschnitten;
3. aus einer Geraden, längs der alle Flächen des Gebüsches sich berühren und 2 weiteren unter sich windschiefen Geraden, welche der ersteren je einmal begegnen.

Dazu kommen noch diejenigen Fälle, die sich ergeben, wenn die in 1., 2., 3. auftretenden Kegelschnitte resp. Kurven 3. Ordnung wiederum zerfallen.

Alle diese Fälle führen aber zu keiner neuen Verwandtschaft, sie geben nur Abarten des von uns ursprünglich gefundenen allgemeinen Gebüsches, in dem der fundamentale Restschnitt eine Kurve 4. Ordnung war. Bleiben wir also allgemein, so hat sich nur ein einziges homaloidisches Gebüsch von solchen Flächen 4. Ordnung ergeben, in welchem die veränderlichen Schnittkurven solche von der 4. Ordnung sind.

§ 3. Nachweis des entstehenden homaloidischen Gebüsches und Herstellung der Raumverwandtschaft.

Die von uns mit C^8 benannte Raumkurve stellte mit dem gemeinsamen Doppelkegelschnitt den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen $F^4{}_2\alpha$ und $F^4{}_2\beta$ vor, beide zusammen repräsentieren 33 Bedingungen für eine $F^4{}_2$. Man nehme nämlich einen beliebigen Punkt P an, der weder auf C^8 noch auf d^2 liege, dann gibt es durch diesen und die Kurven C^8 und d^2 nur eine $F^4{}_2$ mit d^2 als Doppelkegelschnitt. Man lege zum Beweise irgend eine Ebene π durch P, dann schneiden auf dieser die 2 Flächen $F^4{}_2\alpha$ und $F^4{}_2\beta$ 2 Kurven 4. Ordnung vom Geschlechte 1 aus, mit 2 gemeinsamen Doppelpunkten. Die 4×4 Schnittpunkte derselben sind die Schnitte von π mit C^8 und d^2, wobei eben die Schnitte mit d^2 als Doppelpunkte zählen. Nun weiß man aber, daß durch die 4×4 Schnittpunkte zweier solcher Kurven ein ganzes Büschel bestimmt ist, durch jeden Punkt der Ebene π läuft eine Kurve desselben. Es gibt sonach durch P in der Ebene π liegend nur eine Kurve 4. Ordnung vom Geschlechte 1 von der Eigenschaft, daß sie durch die 8 Punkte $(C^8\times\pi)$ geht und die Doppelpunkte $(d^2\times\pi)$ besitzt. Legt man alle Ebenen durch P und stellt sich darin jeweils diese Kurve vor, so erzeugen dieselben in ihrer Gesamtheit eine und nur diese einzige $F^4{}_2$, welche durch P und C^8 geht und d^2 als Doppelkegelschnitt besitzt. Da eine Fläche 4. Ordnung durch 34 Punkte bestimmt ist, so zählt der vollständige Durchschnitt $[d^2+C^8]$ für 33 Bedingungen. Setzen wir den allgemeinsten Fall dieser C^8 voraus, so hat das Bild K''_6 in α'' 5 Doppelpunkte $L''_1 \ldots L''_5$ und keine weiteren Singularitäten. Von K''_6 sind also $5\cdot3=15$ Bedingungen verlangt. Damit bleibt K''_6 noch auf eine $\frac{6\cdot9}{2}-15=12$ fach unendliche Mannigfaltigkeit beschränkt und ebenso groß ist auch die Mannigfaltigkeit der C^8 auf $F^4{}_2\alpha$. Soll eine $F^4{}_2\gamma$ außer durch d^2 noch durch $C^8=F^4{}_2\alpha\times F^4{}_2\beta$ gehen, so muß sie weitere 12 Bedingungen erfüllen. Da (d^2+C^8) zusammen 33 Bedingungen repräsentieren, so zählt der Doppelkegelschnitt d^2 für $33-12=21$ Bedingungen!

Die als ${}^1C^4{}_0$ erkannte weitere F-Kurve eines $F^4{}_2$-Gebüsches nun ist eine allgemeine Raumkurve 4. Ordnung vom Geschlechte 0. Sie schneidet d^2 viermal und darin eine zweite $F^4{}_2$, sagen wir wieder $F^4{}_2\beta$ achtmal, so bleiben noch $4\cdot4-8=8$ Schnittpunkte $({}^1C^4{}_0\times F^4{}_2\beta)$ übrig. Liegen 9 Punkte von dieser ${}^1C^4{}_0$ auch auf $F^4{}_2\beta$, so geht auch $F^4{}_2\beta$ durch sie hindurch.

Soll somit insgesamt von einer F^4_2 gefordert werden, daß sie die F-Gebilde: $d^2 - {}^fC^4_0 + M$ enthält, so sind von ihr $21 + 9 + 1 = 31$ Bedingungen zu erfüllen, die Fläche ist also faktisch auf eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit beschränkt.

Wir haben nunmehr nachzuweisen, daß sich irgend 3 Flächen des Systems nur in einem einzigen beweglichen Punkte schneiden. Hiebei haben wir vorerst zu untersuchen, in wieviel Punkten die veränderliche Schnittkurve ${}^vC^4_0$ sich auf das F-System stützt. Jede solche Kurve trifft zunächst d^2 in 4 doppelt zu zählenden Punkten und geht durch den F-Punkt M. Zusammen werden damit $2 \cdot 4 + 1 = 9$ Punkte erhalten, in denen ${}^vC^4_0$ eine beliebige F^4_2 des Systems schneidet. Wir müssen noch feststellen, wie oft sich ${}^vC^4_0$ auf die F-Kurve 4. Ordnung stützt; das erfahren wir aus der Abbildung. Die ${}^fC^4_0$ bildet sich ab entweder:

1. in einen durch 2 der L″ gehenden Kegelschnitt;
2. in eine Kurve 3. Ordnung ${}^fK''_3$ mit Doppelpunkt und 3 einfachen Punkten in den L″;
3. in eine Kurve 4. Ordnung ${}^fK''_4$ mit 3 doppelten, 2 einfachen Punkten in den L″.

Sonach blieb das Bild von ${}^vC^4_0$ in α'' bei 1. eine Kurve 4. Ordnung, bei 2. eine Kurve 3. Ordnung und bei 3. ein Kegelschnitt. Es gibt also in 1.: $2 \cdot 4 = 8$; in 2.: $3 \cdot 3 = 9$; in 3.: $4 \cdot 2 = 8$ Schnittpunkte der Teilkurven. Nun sind 2 Fälle zu unterscheiden:

a) Diese Schnittpunkte entstehen durch Projektion von Schnittpunkten ${}^vC^4_0 \times {}^fC^4_0$;
b) ein Punkt von ${}^vC^4_0$ und einer von ${}^fC^4_0$ liegen auf einem Projektionsstrahl, der in einen Punkt abgebildet wird.

Im Falle b) hat der betreffende Projektionsstrahl der Strahlenkongruenz $(u\, d^2)$ außer dem zweifachen Punkt auf d^2 und dem einfachen auf u noch 2 weitere Punkte mit $F^4{}_2\alpha$ gemeinsam, liegt also ganz in ihr. Wir wissen aber, daß nur die 5 Geraden $l_1 \ldots l_5$ dem Leitstrahl u begegnen; dieselben bilden sich in die Punkte $L''_1 \ldots L''_5$ ab und sind die einzigen Geraden der Fläche, welche nur Punkte zu Bildern haben. Jeder andere Schnittpunkt der Teilkurven in α'' ist also Bild eines Schnittpunktes $({}^vC^4_0 \times {}^fC^4_0)$ im Raume. An Hand der diskutierten Abbildungen 1., 3., 4. des vorigen § erkennt man, daß es im Falle 1.: $2 \cdot 4 - 2 = 6$; im Falle 2.: $3 \cdot 3 - 3 = 6$ und im Falle 3: $4 \cdot 2 - 2 = 6$ solche Stützpunkte gibt. Somit hat sich ergeben, daß ${}^vC^4_0$ sich sechsmal auf ${}^fC^4_0$ stützt.

$F^4{}_2\alpha$ spielt in dem Gebüsche keine ausgezeichnete Rolle; nehmen wir des weiteren irgend 2 Flächen $F^4{}_2\beta$ und $F^4{}_2\gamma$ hinzu, so können wir jetzt nachweisen, daß diese 3 beliebigen Flächen sich nur in einem variablen Punkte begegnen. $F^4{}_2\alpha$ und $F^4{}_2\beta$ bestimmen zusammen eine von den Kurven ${}^{\nu}C^4{}_0$. Dieselbe würde nun die beliebige 3. Fläche $F^4{}_2\gamma$ in $4 \cdot 4 = 16$ Punkten schneiden. Davon gehören aber, wie wir oben sahen, 4 doppelt zu zählende Schnittpunkte dem d^2, 6 dem ${}^{f}C^4{}_0$ an und einer fällt nach M. Da nun: $16 - (2 \cdot 4 + 6 + 1) = 1$, so ergibt sich nur noch ein einziger als variabel.

Greifen wir aus dem Netz der ${}^{\nu}C^4{}_0$ auf $F^4{}_2\alpha$ 3 heraus, die wir uns jetzt etwa durch:

$$F^4{}_2\alpha + \lambda \cdot F^4{}_2\beta = 0; \quad F^4{}_2\alpha + \mu \cdot F^4{}_2\gamma = 0; \quad F^4{}_2\alpha + \nu \cdot F^4{}_2\delta = 0$$

darstellen können, so bildet:

$$F^4{}_2\alpha + \lambda \cdot F^4{}_2\beta + \mu \cdot F^4{}_2\gamma + \nu \cdot F^4{}_2\delta = 0$$

das Flächensystem. Dasselbe ist somit linear, dreifach unendlich, und je 3 Flächen begegnen sich nur in einem veränderlichen Punkte. Damit sind alle Bedingungen erfüllt, die für ein homaloidisches Flächensystem gefordert werden.

Ein solches homaloidales Gebüsch kann nun verwendet werden, um eine (4,4)-Verwandtschaft des Raumes herzustellen. Es gehöre einem Raume Σ an, der mit einem 2. Raume Σ' in ein-eindeutige geometrische Verwandtschaft gesetzt werden soll. Dies geschieht dadurch, daß man den Flächen des Gebüsches in Σ die Ebenen des Raumes Σ' kollinear zuordnet. Den variablen Schnittkurven ${}^{\nu}C^4{}_0$ zweier $F^4{}_2$ von Σ entsprechen damit von selbst die Geraden des Σ'-Raumes. Dem zweifach unendlichen System dieser Kurven auf $F^4{}_2\alpha$, d. h. den ${}^{\nu}C^4{}_0$ ist das Geradenfeld der Ebene α' zugeordnet, auf das durch eine Cremona'sche Transformation das Kurvensystem von α'' bezogen werden konnte. Man kann also die Ebene α' samt den darin vorhandenen bes. Kurven und Punkten direkt mittels der Verwandtschaft zu α'' herstellen.

Im Raume Σ' nun gibt es auch ein homaloidisches Flächensystem 4. Ordnung, denn eine Ebene von Σ wird von einer ${}^{\nu}C^4{}_0$ in ebensoviel Punkten geschnitten, wie das ihr homologe Homaloid φ in Σ' von der dem ${}^{\nu}C^4{}_0$ entsprechenden Geraden.

Eine Gerade von Σ schneidet jede $F^4{}_2$ des Gebüsches in 4 Punkten, die ihr entsprechende Kurve ebenso oft jede Ebene des Σ'-Raumes, die-

selbe ist somit von der 4. Ordnung und 2. Art. Schneiden wir im 1. Raume Σ eine Fläche des Gebüsches mit einer Ebene, so erhalten wir eine ebene Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, also vom Geschlechte 1. Da der Ebene eine Fläche φ^4, der $F^4{}_2$ aber eine Ebene in Σ' entspricht, so ist das homologe Gebilde zu jener Schnittkurve wiederum eine ebene Kurve 4. Ordnung und nach dem Riemann'schen Satze vom Geschlechte 1. Daraus folgt weiter, daß dies auch eine solche Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten ist; sie sei mit $K^4{}_1$ bezeichnet. Eine Ebene α von Σ nun wird von allen $F^4{}_2$ des Gebüsches in solchen Kurven $K^4{}_1$ getroffen; demnach schneiden entsprechend alle Ebenen des Raumes Σ' die homologe Fläche $\varphi^4\alpha$ in lauter solchen Kurven $K^4{}_1$, woraus folgt, daß diese Fläche eine Doppelkurve 2. Ordnung besitzt. Dasselbe ergibt sich aber für jede Fläche φ^4 des Gebüsches von Σ'. Da es nicht möglich ist, daß jede Fläche eines Gebüsches Doppelpunkte besitzt, die außerhalb der F-Elemente gelegen sind,[20]) so ist diese Doppelkurve 2. Ordnung, sie möge A^2 heißen, allen Flächen φ^4 gemeinsam und wir haben auch im 2. Raume ein $\varphi^4{}_2$-Gebüsch von derartigen besonderen Flächen 4. Ordnung. Es gibt aber, wie wir fanden, nur einen einzigen Typus eines derartigen homaloidischen Flächensystems. Das Gebüsch des Σ'-Raumes besitzt also im allgemeinen Falle, den wir auch hier wieder vorauszusetzen haben und der sich im folgenden Paragraphen noch bestätigen wird, außer A^2 noch eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art und einen einzelnen Punkt zu Grundelementen.

Es gibt nur eine Art von (4,4) Verwandtschaften, in denen den Ebenen Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen; die homaloidischen Gebüsche sind dabei in beiden Räumen von der nämlichen Beschaffenheit.

§ 4. Bestimmung der Fundamentalflächen.

Die Grundelemente des homaloidischen Flächensystems sind fundamental für die Raumverwandschaft. In Σ sollen sie d^2, ${}^fC^4{}_0$ und M, in Σ' A^2, ${}^fT^4{}_0$ und M heißen. d^2 und ${}^fC^4{}_0$, resp. A^2 und ${}^fT^4{}_0$ sind die Fundamentalkurven des Raumes Σ bezw. Σ', M und M sind isolierte F-Punkte 1. Ordnung. Diesen F-Kurven und -Punkten sind F-Flächen entsprechend, die zu bestimmen unsere Aufgabe ist. Einem isolierten F-Punkt ist eine Ebene des andern Raumes zugeordnet.

[20]) Doehlemann, Geom. Transform. S. 309.

Die ${}^{1}C^{4}_{0}$ und ${}^{1}T^{1}_{0}$ sind einfache F-Kurven, ihren einzelnen Punkten entsprechen Gerade, die in ihrer Gesamtheit die F-Flächen erzeugen, welche diesen 2 Kurven zukommen. Die Punkte von d^2 und A^2 aber sind Doppelpunkte für jede Fläche des betr. Gebüsches; ihnen entsprechen Kegelschnitte und den Kurven d^2 und A^2 selbst die Flächen, welche durch diese Kegelschnitte erzeugt werden.

Mittels der Abbildung der F-Kurven und -Punkte von Σ auf die Ebene α' kann man die Ordnung der 3 F-Flächen des Σ'-Raumes auffinden: die des Σ-Raumes sind denselben analog. Wir erhalten α' durch eine Cremona-Transformation aus α''. Bei den 3 verschiedenen Fällen war dieselbe von der 4. resp. 3. resp. 2. Ordnung. Der Einfachheit halber wählen wir den letzten der aufgefundenen Fälle, wo α'' samt seinem Kegelschnittnetz in α' und sein Geradenfeld mittels einer quadratischen Transformation verwandelt wird.

In α'' entsprach der F-Kurve ${}^{1}C^{4}_{0}$ die Kurve ${}^{1}K''_{4}$ mit 3 doppelten und 2 einfachen Punkten in den L''. Wir haben die Abbildung dieser ${}^{1}K''_{4}$ in α' aufzusuchen und gelangen auf diese Weise zu denjenigen Punkten der Ebene α', welche der F-Kurve ${}^{1}C^{4}_{0}$ entsprechen. Dieselben bezeichnen uns aber das Schnittgebilde der Ebene α' mit der dem ${}^{1}C^{4}_{0}$ entsprechenden F-Fläche von Σ'.

${}^{1}K''_{4}$ geht je einmal durch die 2 F-Punkte L''_1, L''_2 der quadratischen Transformation. Von der homologen Kurve spalten sich demnach die 2 F-Geraden λ'_1 und λ'_2 ab und es bleibt die Ordnung der Kurve in α' noch $2 \cdot 4 - 2 = 6$. Da ${}^{1}K''_{4}$ einmal durch L''_1 geht, so schneidet λ'_1 diese K'_6 nur einmal außerhalb der F-Punkte A'_2 und M'; ebenso trifft λ'_2 nur einmal außerhalb A'_1 und A'. Ferner geht ${}^{1}K''_{4}$ nicht durch M'' und die zugeordnete F-Gerade μ' in α' begegnet also der K'_6 nur in den F-Punkten A'_1 und A'_2. Aus all dem folgt, daß M' zweifacher, A'_1 und A'_2 dreifache Punkte von K'_6 sind. Die Doppelpunkte L''_3, L''_4, L''_5 transformieren sich in die Doppelpunkte A'_3, A'_4, A'_5. K'_6 besitzt also 2 dreifache und 4 Doppelpunkte. Weitere Singularitäten kann sie dann ohne zu zerfallen nicht haben. Geschlecht: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 - [2 \cdot 3 + 4] = 0$.

Wie α', so schneidet auch eine andere Ebene von Σ' die dem ${}^{1}C^{4}_{0}$ entsprechende F-Fläche in einer ähnlichen Kurve. Somit läßt sich vermuten, daß diese mit Φ^6 zu bezeichnende F-Fläche von Σ' von der 6. Ordnung ist, einen dreifachen Kegelschnitt und eine zweifache Kurve 4. Ordnung besitzt. Wir wissen, daß diese F-Fläche eine Regelfläche sein muß und erkennen sie sofort als die Regelfläche derjenigen zweifachen Sekanten von ${}^{1}T^{1}_{0}$, die den Doppelkegelschnitt A^2

zur Leitlinie hat. Einer solchen Sekante entspricht nämlich keine Kurve mehr, da sich von der entsprechenden Raumkurve 4. Ordnung zwei Gerade und ein Kegelschnitt abspalten. Wir müssen verifizieren, daß diese Regelfläche von der 6. Ordnung ist.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen 3 Doppelsekanten der ${}^1\Gamma^4_0$, es sind die 3 Doppelstrahlen des die Kurve projizierenden Kegels 4. Ordnung vom Geschlechte 0. Daraus ergibt sich, daß die Leitlinie Δ^2 dreifache Kurve der Regelfläche ist. Von einem Punkt O der ${}^1\Gamma^4_0$ aus werden Δ^2 und ${}^1\Gamma^4_0$ durch Kegel von der Ordnung 2 resp. 3 projiziert. Beide haben $2 \cdot 3 = 6$ Strahlen gemein, von denen jedoch nur 2 Regelstrahlen sind, da die nach den 4 Schnittpunkten $[{}^1\Gamma^4_0 \times \Delta^2]$ laufenden nur dann als solche zählen würden, wenn sie ${}^1\Gamma^4_0$ in diesen genannten Schnittpunkten berühren, was i. a. natürlich nicht eintrifft. ${}^1\Gamma^4_0$ ist sonach Doppelkurve dieser Regelfläche. Um die Ordnung derselben zu finden, beachten wir den vollständigen Durchschnitt der Doppelkegelschnittebene mit ihr. Er besteht zunächst aus dem dreifachen Kegelschnitt Δ^2. Irgend ein weiterer Punkt der Regelfläche aber, der in dieser Ebene gelegen ist, müßte auf einem Regelstrahl liegen, der auch ganz in dieser Ebene verläuft. Solche gibt es i. a. nicht. Sie müßten von den Punkten $P' = [{}^1\Gamma^4_0 \times \Delta^2]$ ausgehen. Wir wollen die Regelstrahlen aufsuchen, welche von solch einem Punkte ausgehen: Zuvörderst gehört hieher die dreifache Sekante durch P', die unmöglich in der Ebene Δ^2 liegen kann. Zwar sind alle von P' auslaufenden Projektionsstrahlen der ${}^1\Gamma^4_0$ zweifache Sekanten dieser Kurve und treffen in P' auch Δ^2, sie sind aber nicht alle Erzeugende der Regelfläche. Deren gibt es nur 2 unter ihnen, zu welchen wir durch die folgende Überlegung gelangen. Sei a ein allgem. Regelstrahl, der Δ^2 in Q', ${}^1\Gamma^4_0$ in M' und N' schneidet. Rückt nun Q' nach P', so rückt mit Ausnahme des einzigen Falles der Trisekante auch M' nach P' und es bleibt nur ein von P' verschiedener Schnittpunkt von a mit ${}^1\Gamma^4_0$. M' rückt also auf ${}^1\Gamma^4_0$ und Q' auf Δ^2 nach P'. Wenn sie beide nach P' fallen, so muß a in der gemeinsamen Tangentialebene beider Kurven verlaufen. Nun trifft diese Tangentialebene die ${}^1\Gamma^4_0$ noch zweimal. Die Geraden von P' nach diesen Schnittstellen sind die 2 übrigen durch P' gehenden Regelstrahlen, die aber i. a. nicht in der Ebene von Δ^2 gelegen sein werden. Dies könnte nur eintreten, wenn jene gemeinsame Berührungsebene in die Δ^2-Ebene fällt, sodaß ${}^1\Gamma^4_0$ diese Ebene von Δ^2 tangiert. Somit ist das dreifach zu rechnende Δ^2 der vollständige Schnitt und diese Regelfläche von der 6. Ordnung.

Da die Gesamtordnung der Jakobischen Fläche des Raumes Σ', welche sich aus den F-Flächen zusammensetzt vom Grade $4(4-1)=12$ ist, und dem M eine F-Ebene entspricht, so ist ausgeschlossen, daß außer dieser eben gefundenen fundamentalen Regelfläche noch eine F-Fläche 6. Ordnung auftritt und somit evident, daß wir in der Regelfläche die F-Fläche Φ^6 vor uns haben, die dem ${}^{1}C^{4}{}_{0}$ zugeordnet ist. Zusammenfassend können wir also sagen:

Dem ${}^{1}C^{4}{}_{0}$ entspricht als F-Fläche die Regelfläche Φ^6 6. Ordnung der von A^2 ausgehenden Doppelsekanten der ${}^{1}\Gamma^{4}{}_{0}$, auf welcher A^2 dreifach und ${}^{1}\Gamma^{4}{}_{0}$ doppelt ist. Analog entspricht dem ${}^{1}\Gamma^{4}{}_{0}$ in Σ die Fundamentalfläche F^6 der durch d^2 gehenden Doppelsekanten von ${}^{1}C^{4}{}_{0}$, die durch d^2 dreimal, durch ${}^{1}C^{4}{}_{0}$ zweimal hindurch geht.

Welches ist nun die dem Doppelkegelschnitt d^2 zugehörige F-Fläche?

Wenn $F^{4}{}_{2}\alpha$ in α'' abgebildet wird, so entspricht dem Doppelkegelschnitt d^2 eine Kurve ${}^{d^2}K''_3$ 3. Ordnung vom Geschlechte 1, durch $L''_1 \ldots L''_5\, U''$ gehend, derart, daß einem Punkte A von d^2 ein Punktepaar A''_1, A''_2 dieser Kurve zugehört.[21]) Transformieren wir nun α'' in α', so geht ${}^{d^2}K''_3$ in eine Kurve ${}^{d^2}K'_4$ 4. Ordnung vom Geschlechte 1 über. Da die Verbindungsgeraden $\overline{M''L''_1}$ und $\overline{M''L''_2}$ außer in den F-Punken der quadratischen Transformation noch zweimal schneiden, so werden A'_1 und A'_2 die Doppelpunkte der Kurve. Da die Geraden durch U'' sich in die Kegelschnitte des Büschels $[A'_1 A'_2 M' U']$ transformieren, so werden durch diese letzteren auf der Kurve 4. Ordnung die den Punkten von d^2 homologen Punktepaare A'_1, A'_2 ausgeschnitten. α' aber ist eine beliebige Ebene von Σ' und wir sehen infolgedessen, daß die F-Fläche, die dem d^2 entspricht, eine Fläche 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt ist; sie sei mit Φ^4 benannt. Einem Punkte A von d^2 ist eine Kurve zugeordnet, die von den Ebenen $\alpha', \beta' \ldots$ in Punktepaaren $A'_1 A'_2$, $B'_1 B'_2 \ldots$ getroffen wird, also in der Tat ein Kegelschnitt. Wir wissen schon, daß Φ^4 durch jene $[\infty^1]$ Kegelschnitte erzeugt wird. Eine beliebige Ebene π von Σ schneidet d^2 zweimal, also enthält die entsprechende Fläche $\varphi^{4}{}_{2}\pi$ 2 der Kegelschnitte. Analog wird auch die dem Doppelkegelschnitt A^2 zugehörige F-Fläche F^4 in Σ durch die den einzelnen Punkten desselben entprechenden Kegelschnitte erzeugt und jede Fläche des $F^{4}{}_{2}$-Gebüsches enthält 2 solche Kegelschnitte. Das muß sich auch in der Abbildung nachweisen lassen. $F^{4}{}_{2}\alpha$ hat mit F^4 diejenigen 2 Kegelschnitte gemein,

[21]) Sturm. Geom. Verwandtsch. IV. S. 308.

welche die 2 Geraden $\overline{M'' L''_1}$ und $\overline{M'' L''_2}$ in α'' zu Bildern haben; sie schneiden d^2 zweimal, ${}^1C^4_0$ dreimal, was sich aus den Bildern erkennen läßt. Von jeder der ihnen homologenen Raumkurven $2 \cdot 4 = 8$. Ordnung würden sich 4 Gerade und 2 Kegelschnitte abspalten. Legt man durch einen Punkt O eines solchen Kegelschnittes die ∞^2 Flächen des Gebüsches, so gehen dieselben durch den ganzen Kegelschnitt, da sie 9 Punkte von ihm enthalten. Das homologe Ebenenbündel in Σ' besitzt als Scheitel den Punkt O', der diesem Kegelschnitt entspricht und O' ist ein Punkt von A^2, da nur dessen Punkte zweifache F-Punkte sind. Also auf jeder F^4_2 des Gebüsches von Σ liegen 2 solche erzeugende Kegelschnitte von F^4; zwar gibt es ∞^3 solche F^4_2, aber ∞^2 gehen ja jeweils durch ein und denselben dieser Kegelschnitte, sodaß tatsächlich sich ∞^1 Kegelschnitte ergeben, die den Punkten von A^2 homolog sind. Es sind also diejenigen Kegelschnitte durch M, welche außer d^2 zweimal zu treffen auch ${}^1C^4_0$ dreimal schneiden. Analog wird Φ^4 durch diejenigen Kegelschnitte durch M erzeugt, welche dem A^2 zweimal, dem ${}^1\Gamma^4_0$ dreimal begegnen.

Über die Lage dieser Kegelschnitte können wir noch etwas weiteres erfahren: Wird $F^4_2 \alpha$ nach α'' abgebildet, so erzeugen die Punktepaare $A_1'' A''_2$, die den Punkten von d^2 entsprechen auf ${}^{d2}K''_3$ eine zentrale Involution. Wird α'' auf α', so wird ${}^{d2}K''_3$ auf ${}^{d2}K'_4$ abgebildet und wir erhalten auch auf ${}^{d2}K''_4$ eine Involution. Da die Strahlen von U'' sich wie erwähnt in die Kegelschnitte des Büschels $[A'_1 A'_2 M' U']$ transformieren, so haben wir eine Involution 1. Stufe auf der ebenen Kurve 4. Ordnung[22]). Diese Involution besitzt einen Direktionskegelschnitt, der von den Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Punkte $A'_1 A'_2$ umhüllt wird. Uns ist nun bekannt, daß diese Punktepaare als Schnittpunktpaare der Ebene α' mit den Kegelschnittten entstehen, die Φ^4 erzeugen und die alle durch M, den isolierten Doppelpunkt von Σ' hindurchgehen. Die Ebenen $\overline{A'_1 A'_2 M}$ sind die Ebenen jener Kegelschnitte. Sie treffen α' eben in dem Tangentenbüschel des Direktionskegelschnittes, so daß wir erkennen: Die Kegelschnitte, welche die F-Fläche Φ^4 und analog diejenigen, welche die F-Fläche F^4 erzeugen, umhüllen mit ihren Ebenen einen Kegel 2. Ornung, der seine Spitze in M resp. in M hat.

Ferner ergiebt sich noch folgendes: Die Ebene α' schneidet also Φ^4 in dieser Kurve ${}^{d2}K'_4$ und deren Doppelpunkte A'_1 und A'_2 sind die Spurpunkte der Doppelkurve von Φ^4 in dieser α'-Ebene. Das

[22]) Sturm. Geom. Verwandtsch. IV. S. 215.

Homaloid $F^1{}_2\alpha$ schneidet die F-Fläche F^4 in 2 Kegelschnitten, denen die 2 Schnittpunkte von α' mit A^2 entsprechen. Wir erkennen vermittelst der Abbildnug, daß diese 2 Kegelschnitte von $F^1{}_2\alpha$ auf α'' als die 2 Gerade $\overline{M''L''_1}$ und $\overline{M''L''_2}$ und auf α' als die Punkte A'_1, A'_2 projiziert werden, daß also die Schnittpunkte der Ebene α' und der Doppelkurve der F-Fläche Φ^4 identisch sind mit den Schnittpunkten $[\alpha' \times A^2]$. Daraus folgt, daß A^2 auch die Doppelkurve von Φ^4 ist. Weil die erzeugenden ∞^1 Kegelschnitte auch ${}^1\Gamma^4_0$ schneiden, so geht natürlich Φ^4 auch durch dieses. Da schon A^2 Doppelkurve für diese Fläche Φ^4 ist, so kann dieselbe dieses ${}^1\Gamma^4_0$ nur einmal enthalten, wie wir aus der Schnittfigur ${}^{d^2}K'_4$ ersehen. Die F-Fläche die dem Doppelkegelschnitt eines der beiden Räume entspricht, ist also jeweils eine spezielle Fläche aus dem Gebüsche des anderen Raumes und wird von den Kegelschnitten erzeugt, die durch den isolierten F-Punkt gehen und, außer die fundamentale Doppelkurve 2. Ordnung zweimal zu treffen, der F-Kurve 4. Ordnung noch dreimal begegnen. Die Ebenen dieser Kegelschnitte bilden dabei einen Ebenenbüschel 2. Ordnung.

Jede Fläche $\varphi_2{}^4$ des Gebüsches, die einfach durch M geht, trifft also Φ^4 in zweien dieser Kegelschnitte. Die Schnittkurve von Φ^4 mit jedem $\varphi_2{}^4$ hat also in M einen Doppelpunkt. Denkt man sich an eine solche Schnittkurve im Doppelpunkte M die 2 Tangenten gezogen, so bestimmen diese eine Ebene und zwar offenbar die Tangentialebene von $\varphi_2{}^4$ in M. Diese Ebene schneidet dann Φ^4 in einer Kurve 4. Ordnung, die in M ebenfalls einen Doppelpunkt hat, so zwar, daß die Tangenten in demselben mit den ebenerwähnten 2 Tangenten übereinstimmen. Nun gilt jedoch diese Beobachtung für jedes $\varphi_2{}^4$ des Gebüsches, und jede Ebene durch M muß aus Φ^4 eine Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in M ausschneiden. Da jedoch nicht alle diese Ebenen Tangentialebenen von Φ^4 sein können, so ist nur noch der eine Fall möglich, daß diese Fläche in M einen Knotenpunkt hat.

Die F-Fläche Φ^4 ist somit eine Fläche 4. Ordnung mit dem Doppelkegelschnitt A^2, der einfachen Kurve ${}^1\Gamma_0{}^4$ und dem Knotenpunkte M. Ein Doppelpunkt nun zählt, wie bekannt ist, für eine Fläche für 4 Bedingungen; da $[A^2 + {}^1\Gamma_0{}^4]$ ferner 30 Bedingungen absorbieren für eine $\varphi_2{}^4$ und eine solche durch 34 Punkte bestimmt ist, so gibt es nur eine Fläche des $\varphi_2{}^4$-Gebüsches, die M zum Doppelpunkt hat. Analog ist F^4 diejenige Fläche des $F_2{}^4$-Gebüsches von Σ, welche M zum Doppelpunkte hat.

Vom Punkte M aus gibt es 4 Strahlen des Kegels (MA^2), die ${}^1\Gamma_0{}^4$ in einem von A^2 verschiedenen Punkte treffen; sie haben mit Φ^4

$2+2+1=5$ Punkte gemein, liegen also ganz auf demselben. In der Tat enthalten ja diese Strahlen 2 einfache und einen doppelten F-Punkt, müssen also einer F-Fläche angehören. Es sind die 4 Strahlen des Oskulationskegels an Φ^4 in M, die auch auf der Fläche liegen. In einem gewöhnlichen Knotenpunkt von Φ^4 gibt es ja einen Berührungskegel 2. Ordnung. Dieser schneidet die Ebene von Δ^2 in einem Kegelschnitt, welcher Δ^2 viermal trifft. Auf diesem Wege erkennt man auch, daß nicht mehr als 4 solche Erzeugende des Oskulationskegels gleichzeitig auf der Fläche verlaufen können, d. h. es gibt nur 4 durch den Knotenpunkt M gehende Gerade der Fläche Φ^4. Analoges gilt für F^4.

Dem M entspricht als einfachem F-Punkt eine Ebene, welche als zweifacher Bestandteil der Jakobischen Fläche in Σ' zählt.[23]) Aber wir wollen diese Ebene μ, die natürlich keine andere als die Ebene von Δ^2 ist, auf dieselbe Weise finden, wie die übrigen 2 F-Flächen. M wird bei der Abbildung von $F^4{}_2\alpha$ auf α'' nach M'' und in α' schließlich in die Gerade μ' projiziert, die die 2 Doppelpunkte Δ'_1, Δ'_2 der Φ^4 verbindet. μ' stellt diejenigen dem M in Σ' zugeordneten Punkte dar, welche in der Ebene α' liegen, d. h. den Schnitt der letzteren mit der F-Fläche μ, die dem M entspricht. Diese F-Fläche ist also in der Tat eine Ebene und zwar, wie man hier erkennt, die Ebene μ von Δ^2. Analog entspricht auch dem F-Punkte M in Σ die Ebene m von d^2.

Wir haben somit die F-Flächen in beiden Räumen gefunden, in Σ sind es F^6, F^4 und m, in Σ' Φ^6, Φ^4 und μ; und können unsere Ergebnisse mittelst der allgemein gültigen Gesetze kontrollieren. Das System der F-Flächen bildet die Jakobische Fläche des Gebüsches in jedem Raume. Die Ordnung der letzteren ist hier, wie bereits bemerkt: $4\cdot(4-1)=12$. Sie besteht in Σ aus F^6, F^4 und dem doppelt gezählten m, in Σ' aus Φ^6, Φ^4 und dem doppelten μ.

Ferner ist bekannt:[24]) „In einem F-Punkte iter Ordnung hat die Jakobische Fläche selbst einen $(4i-2)$fachen Punkt; eine ifache F-Kurve des Flächensystems hat sie selbst zur $(4i-1)$fachen Kurve."

Die Jakobische Fläche J'_{12} von Σ' hat M zum Doppelpunkt: Dies trifft zu, da Φ^4 dort einen Knotenpunkt hat, die Φ^6 und μ aber nicht durch diesen gehen. J'_{12} hat ${}^1\Gamma_0{}^4$ zur dreifachen Kurve, da in der Tat Φ^6 zweifach, Φ^4 einfach durch sie geht; und Δ^2 zur $(4\cdot2-1)=7$fachen Kurve, da Φ^6 dreimal, Φ^4 zweimal und das doppelt zu zählende μ einmal diesen Kegelschnitt enthalten.

---

[23]) Sturm, Geom. Verwandtsch. IV. S. 345.
[24]) Döhlemann, Math. Annalen 41. S. 545—570. Geom. Transf. II. S. 317.

Mit diesen Kontrollen und den Gesamtergebnissen dieses Paragraphen über das F-System des Raumes Σ' ist auch die am Ende des vorangehenden Paragraphen gemachte Schlußfolgerung bestätigt. An jener Stelle wurde ausdrücklich auf diese Bestätigung verwiesen.

Es muß noch aufgeklärt werden, wie es mit dem Schnittgebilde $\Phi^4 \times \Phi^6$ resp. $F^4 \times F^6$ bestellt ist. Jede Ebene α' trifft ${}^1\Gamma_0{}^4$ in 4 Punkten, sodaß jede $F_2{}^4$ des Gebüsches in Σ die F-Fläche F^6 in 4 Geraden schneidet, welche Erzeugende der letzteren sind. Vermutlich schneidet auch die spezielle Fläche F^4 des Gebüsches diese F^6 in 4 Geraden, mit anderen Worten: jedem Punkte von ${}^1\Gamma_0{}^4$ entspricht eine Erzeugende von F^6, also wahrscheinlich auch den 4 Punkten von ${}^1\Gamma_0{}^4$, die in μ gelegen sind.

Nun schneiden sich F^6 und F^4 in einer Kurve der Ordnung 24. Davon absorbieren die F-Kurven: d^2: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, ${}^1C^4{}_0$: $2 \cdot 4 = 8$, sodaß noch eine Schnittkurve 4. Ordnung verbleibt, die nicht zu den Grundelementen des Gebüsches gehört. Jede derartige auf F^6 verlaufende Kurve nun wird aber in Punkte der ${}^1\Gamma_0{}^4$ abgebildet, jede derartige auf F^4 in Punkte der Δ^2. Diese Kurve 4. Ordnung gehört nun beiden F-Flächen an, wird also in die dem Δ^2 und ${}^1\Gamma_0{}^4$ gemeinsamen Elemente, d. h. in deren 4 Schnittpunkte abgebildet. Wir haben eine eindeutige Raumverwandtschaft vor uns, in der einer Kurve nur entweder wieder eine solche oder, wenn sie fundamental ist, eine Fläche oder ein Punkt, unmöglich aber eine endliche Anzahl von Punkten entspricht. Da übrigens noch von den 4 Schnittpunkten $(\Delta^2 \times {}^1\Gamma_0{}^4)$ jeder die gleiche Rolle spielt, so ist klar, daß die erwähnte Schnittkurve $(F^6 \times F^4)$ aus 4 einzelnen Geraden besteht, von denen jede einem der Schnittpunkte $(\Delta^2 \times {}^1\Gamma_0{}^4)$ zugeordnet ist. Diese 4 Gerade müssen also in der Tat Erzeugende von F^6 sein und können, wie ausdrücklich bemerkt sei, nicht durch M gehen. Jeder Punkt $(\Delta^2 \times {}^1\Gamma_0{}^4)$ nun ist aber zweifacher Grundpunkt des Gebüsches von Σ' und auf der Doppelkurve gelegen; ihm entspricht also ein Kegelschnitt in Σ. Da von demselben nun, wie wir sahen, eine Gerade sich abspaltet, so ist der Rest eine durch M gehende, also nur auf F^4 verlaufende Gerade. Deren gibt es jedoch überhaupt nur 4, wie wir schon erkannt haben.

Jede der dort beobachteten, durch M gehenden Geraden der Fläche F^4 schneidet daher außer auf d^2 oder ${}^1C^4{}_0$ die F-Fläche F^6 nur einmal und dort auch diejenige Erzeugende dieser Regelfläche, welche mit ihr zusammen den zerfallenden Kegelschnitt bildet, der zu den erzeugenden Kegelschnitten der F^4 zählt. Auch ein solcher zerfallender Kegelschnitt stützt sich dreimal auf ${}^1C^4{}_0$ und zweimal auf d^2. Ganz

analog findet man die entsprechenden Gebilde zu den 4 Schnittpunkten $[d^2 \times {}^fC^4_0]$.

§ 5. Verschiedene Folgerungen.

Man verifiziert jetzt auch leicht mit Hilfe der F-Gebilde, daß einer beliebigen Geraden des einen Raumes eine Kurve 4. Ordnung 2. Art entspricht, welche durch den isolierten F-Punkt geht, sich sechsmal auf die F-Kurve 4. Ordnung und viermal auf den Doppelkegelschnitt stützt; denn die Gerade begegnet der F-Ebene ihres Raumes einmal, der F-Fläche 6. Ordnung sechsmal und viermal der F-Fläche 4. Ordnung. Gewisse Gerade jedoch transformieren sich wieder in solche.

Die Regelfläche der dreifachen Sekanten der ${}^fC^4_0$ $[{}^f\Gamma_0{}^4]$ ist von der Ordnung 2 und stellt die einzige Fläche 2. Ordnung durch diese Kurve dar. Als F^2 müßte sie in eine Fläche 8. Ordnung verwandelt werden. Da sie jedoch ${}^fC^4_0$ enthält, so spaltet sich Φ^6 ab und es entspricht ihr wieder eine Fläche 2. Ordnung. Erzeugende Gerade derselben sind diejenigen, die den dreifachen Sekanten von ${}^fC_0{}^4$ entsprechen. Da jede solche Sekante die Ebene m außerhalb d^2 schneidet, so geht die homologe Gerade durch M. Diese Fläche 2. Ordnung in Σ' ist somit ein Kegel, dessen Scheitel in M liegt. Es gibt durch M jedoch nur einen einzigen Kegel 2. Ordnung, dessen Strahlen sich wieder in Gerade abbilden; es ist dies der Kegel $(M\Delta^2)$. Ferner gehen durch M 3 zweifache Sekanten der ${}^fC^4_0$, denen wieder Gerade entsprechen. Auch sie begegnen alle der F-Ebene m, sodaß ihre homologen Strahlen von M ausgehen. Da die Strahlen des Kegels $(M\Delta^2)$ schon diskutiert sind, so verbleiben nur noch die 3 von M ausgehenden Doppelsekanten von ${}^f\Gamma_0{}^4$. Zusammenfassend formulieren wir:

Den Strahlen des Kegels vom isolierten Hauptpunkt des einen Raumes nach der Doppelkurve entsprechen die dreifachen Sekanten der F-Kurve 4. Ordnung im anderen Raume; den 3 durch diesen F-Punkt gehenden Doppelsekanten jener Raumkurve sind die 3 Doppelsekanten im andern Raum homolog, die dort vom isolierten F-Punkt nach der F-Kurve 4. Ordnung laufen.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gibt es nur 4 Gerade, die sich wieder in Gerade transformieren, nämlich die 4 Strahlen des Kegels (Pd^2) von diesem Punkte P aus, die auch dem ${}^fC^4_0$ begegnen. Die beiden Kegel (Pd^2) und $(P{}^fC^4_0)$ schneiden sich zwar in 8 Geraden, davon bilden sich jedoch die 4 Strahlen nach den Schnittpunkten $(d^2 \times {}^fC^4_0)$ nicht wieder in Gerade ab. Durch den entsprechenden

Punkt P′ des Σ'-Raumes gehen ebenfalls 4 Gerade, welche sowohl dem Doppelkegelschnitt als der F-Kurve ${}^{1}T_0^{4}$ begegnen.

Die Strahlen, welche d^2 und ${}^{1}C^{4}_{0}$ und analog die, welche A^2 und ${}^{1}T_0^{4}$ treffen, bilden in ihrer Gesamtheit eine Strahlenkongruenz von der Ordnung 4 und der Klasse 8. Die Ordnung erkannten wir soeben, die Klasse ergibt sich, wenn wir schließen: Eine beliebige Ebene schneidet ${}^{1}C^{4}_{0}$ viermal, d^2 zweimal, sodaß die 4 Geraden von jedem der Spurpunkte der Doppelkurve nach den Schnittstellen der ${}^{1}C^{4}_{0}$ Strahlen der Kongruenz sind.

In dieser (4,4) Verwandtschaft sind somit die Strahlen zweier Kongruenzen 4. Ordnung 8. Klasse einander zugeordnet; durch die projektiven Punktreihen auf den entsprechenden Strahlen in beiden wird also die Raumtransformation vermittelt.

Zusatz zu Kapitel II.

Analytische Darstellung dieser (4,4) Verwandtschaft.

Die allgemeinste Fläche 4. Ordnung ist durch die Gleichung:

$$F^4 = x^4_4 \cdot a + x^3_4 \cdot \varphi^1(x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2(x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3(x_1, x_2, x_3) + \varphi^4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dargestellt, wo a eine Konstante, die $\varphi^n(x_1, x_2, x_3)$ homogene Funktionen nten Grades von x_1, x_2, x_3 bedeuten.

Geht die Fläche F^4 durch einen Eckpunkt $[x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0]$ des Koordinatentetraeders, dann muß für $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$ auch $F^4 = 0$, also $a = 0$ sein:

$$F^4 = x^3_4 \cdot \varphi^1(x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2(x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3(x_1, x_2, x_3) + \varphi^4(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Nun sei die Ebene $x_4 = 0$ zugleich die Ebene des Doppelkegelschnittes in einer unserer bekannten Flächen 4. Ordnung. Dann muß für $x_4 = 0$ ein doppelter Kegelschnitt $\Phi^2(x_1, x_2, x_3) = 0$ sich ergeben:

$$F^4_2 = x^3_4 \cdot \varphi^1(x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2(x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3(x_1, x_2, x_3) + [\Phi^2(x_1, x_2, x_3)]^2 = 0.$$

Von dieser Art müssen die Flächen der homaloidischen Gebüsche sein. Die Gleichungen der Raumverwandtschaft können also vorläufig angesetzt werden:

$$\varrho \cdot x'_i = \varphi_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

wobei $\varphi_i \equiv x^3_4 \cdot \varphi^1_i (x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2_i (x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3_i (x_1, x_2, x_3) + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2$ und $\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)$ in allen 4 Gleichungen ($i = 1, 2, 3, 4$) dasselbe ist.

Den Ebenen: $\alpha \cdot x'_1 + \beta \cdot x'_2 + \gamma \cdot x'_3 + \delta \cdot x'_4 = 0$ entsprechen Flächen
$\alpha \cdot \varphi_1 + \beta \cdot \varphi_2 + \gamma \cdot \varphi_3 + \delta \cdot \varphi_4 = 0$

welche sich auf die Form F^4_2 bringen lassen, sodaß für $x_4 = 0$ auch $[\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2 = 0$ wird und die Flächen

die fundamentale Doppelkurve $\begin{cases} x_4 = 0 \\ \Phi^2 (x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$ besitzen.

Nun ist aber noch zu berücksichtigen, daß der gemeinsame 4. Koordinatentetraederpunkt auch F-Punkt [$\equiv$ M bzw. M] ist, sodaß den Ebenen durch ihn keine Flächen 4. Ordnung entsprechen. Damit nun in den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot x'_1 &= x^3_4 \cdot \varphi^1_1 (x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2_1 (x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3_1 (x_1, x_2, x_3) \\
&\quad + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2 \\
\varrho \cdot x'_2 &= x^3_4 \cdot \varphi^1_2 (x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2_2 (x_1, x_2, x_3) + ... \\
&\quad + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2 \\
\varrho \cdot x'_3 &= x^3_4 \cdot \varphi^1_3 (x_1, x_2, x_3) + ... \qquad + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2 \\
\varrho \cdot x'_4 &= x^3_4 \cdot \varphi^1_4 (x_1, x_2, x_3) + ... \qquad + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2
\end{aligned}$$

für die Ebenen $x'_1 = 0$; $x'_2 = 0$; $x'_3 = 0$ sich die dem einfachen F-Punkt entsprechende F-Ebene $x_4 = 0$ des Doppelkegelschnittes im anderen Raume abspaltet und eine Fläche 3. Ordnung entsteht, muß der letzte Summand in den 3 ersten Gleichungen verschwinden.

Somit erhalten wir die Gleichungen dieser (4,4) Verwandtschaft:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot x'_1 &= x_4 \cdot [x^2_4 \cdot \varphi^1_1 (x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^2_1 (x_1, x_2, x_3) + \varphi^3_1 (x_1, x_2, x_3)] \\
&= x_4 \cdot \Phi^3_1 (x_1, x_2, x_3, x_4); \\
\varrho \cdot x'_2 &= x_4 \cdot [x^2_4 \cdot \varphi^1_2 (r_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^2_2 (x_1, x_2, x_3) + \varphi^3_2 (x_1, x_2, x_3)] \\
&= x_4 \cdot \Phi^3_2 (x_1, x_2, x_3, x_4); \\
\varrho \cdot x'_3 &= x_4 [x^2_4 \cdot \varphi^1_3 (x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^2_3 (x_1, x_2, x_3) + \varphi^3_3 (x_1, x_2, x_3)] \\
&= x_4 \cdot \Phi^3_3 (x_1, x_2, x_3, x_4); \\
\varrho \cdot x'_4 &= x^3_4 \cdot \varphi^1_4 (x_1, x_2, x_3) + x^2_4 \cdot \varphi^2_4 (x_1, x_2, x_3) + x_4 \cdot \varphi^3_4 (x_1, x_2, x_3) \\
&\quad + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2 = x_4 \cdot \Phi^3_4 (x_1, x_2, x_3, x_4) + [\Phi^2 (x_1, x_2, x_3)]^2.
\end{aligned}$$

und nach den x_i aufgelöst:

$$\sigma \cdot x_1 = x'_4 \cdot \Psi^3_1 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4);$$
$$\sigma \cdot x_2 = x'_4 \cdot \Psi^3_2 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4);$$
$$\sigma \cdot x_3 = x'_4 \cdot \Psi^3_3 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4);$$
$$\sigma \cdot x_4 = x'_4 \cdot \Psi^3_4 (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) + [\Psi^2 (x'_1, x'_2, x'_3)]^2.$$

Das Koordinatensystem ist dabei also so gewählt, daß ein Eckpunkt des Tetraeders in den Fundamentalpunkt 1. Ordnung [M bzw. M] fällt, während die anderen 3 in der Ebene des Fundamentalkegelschnittes liegen.

Kapitel III.

Die übrigen Raumtransformationen, in denen den Ebenen des einen Raumes Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt entsprechen.

---

§ 1. Die Verwandtschaft (4,7).

Um nun zu sämtlichen eindeutigen Raumverwandtschaften zu gelangen, in denen die Homaloide des einen Raumes solche Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt sind, muß man alle Möglichkeiten untersuchen, wie diese Schnittkurve 8. Ordnung C^8, die außer dem Doppelkegelschnitt d^2 auftritt, sich zerspalten kann. Da nur die wesentlich verschiedenen Fälle von Interesse sind, so bleibe, wie schon in § 2. Kap. II geschehen ist, unberücksichtigt, daß irgend eine auftretende F-Kurve eventuell auch Abarten haben kann.

Der Zerfall dieser Kurve C^8 hat also stets so zu geschehen, daß der bewegliche Teil ein Netz bildet, während der festbleibende Teil, der alsdann F-Kurve wird, allen $F_2{}^4$ gemeinsam ist.

Wie man ausführlich diesen Weg verfolgen kann, haben wir in Kapitel II dargetan; zum Aufsuchen der übrigen Verwandtschaften wollen wir das Verfahren insofern vereinfachen, als wir zur Bestimmung des F-Systems für den 2. Raum sofort die Abbildung in der Ebene α' benutzen. Aus dem ersten Beispiel wird dies ersichtlich

werden. Als eine Überlegung, die für jede der sich ergebenden Raumverwandtschaften gültig ist, möge folgendes vorausgeschickt sein:

Da in Σ eine F-Ebene, die Ebene von d^2, existiert, so haben die Flächen φ jedes der Gebüsche in Σ' einen einfachen F-Punkt M. Eine besondere Fläche des Gebüsches hat M zum Doppelpunkt und ist Teil der Jakobischen Fläche des Gebüsches, d. h. F-Fläche des Raumes Σ'; sie wird durch die Kegelschnitte erzeugt, die den einzelnen Punkten der d^2 entsprechen. Daß M existieren muß, erkennt man auch in jedem einzelnen Falle daran, daß die Flächen φ durch die aufgefundenen F-Kurven allein erst innerhalb einer vierfach ∞ Mannigfaltigkeit bestimmt sind. Man kann als Kriterium dafür die ebenen Schnitte benutzen und ersieht, daß 3 willkürlich gewählte Punkte die Flächen φ erst auf ein Büschel beschränken.

Hiemit wollen wir unsere Aufgabe in Angriff nehmen.

Eine Verwandtschaft (4,8) existiert nicht, denn die Bildkurve K''_6 von C^8 kann in α'' kein homaloidisches Netz bilden, das 5 doppelte Hauptpunkte besitzt.

Für den 1. Fall spalte sich nunmehr von C^8 eine weitere fundamentale Gerade g ab, die natürlich notwendig dem d^2 begegnet. Von K''_6 muß sich dann das Bild einer Geraden abspalten. Eine Gerade kann nun 1. in einen Punkt L'', 2. in eine Gerade, 3. in den Kegelschnitt u'' abgebildet werden. Alle 3 Fälle ergeben das gleiche Resultat, wie ja wegen der Gleichwertigkeit der 16 Geraden nicht anders zu erwarten ist. Von K''_6 spalte sich also eine Gerade $^1g''$ ab. Der Rest $^vK''_5$ bildet ein homaloidales Netz mit 3 doppelten, 3 einfachen und einem dreifachen F-Punkte, wenn zu den 3 doppelten und 2 einfachen noch ein einfacher M'' und ein dreifacher O'' hinzukommt. Was heißt das nun für die Flächen F_2^4? Die $^vK''_5$ sind Bilder von Kurven auf $F^4{}_2\alpha$ und haben in O'' einen dreifachen Punkt. Somit haben auch die Raumkurven 7. Ordnung $^vC_0^7$ in O einen dreifachen Punkt, wobei O ein Punkt von $F_2^4\alpha$ ist. Sollen also alle F_2^4 durch O gehen und diese 3 Äste der $^vC_0^7$ durch O je mit 3 ∞ nahen Punkten in $F_2^4\alpha$ gelegen sein, so müssen die Flächen F_2^4 in O die Fläche $F_2^4\alpha$ oskulieren. Jede Ebene durch O schneidet 2 beliebige F_2^4 in 2 Kurven, die sich in O dreipunktig berühren. Bei einer solchen Oskulation durchdringen sich ja in der Tat die 2 Flächen in einer Kurve, welche durch den Oskulationspunkt mit 3 Ästen hindurchgeht.

Von einem beliebigen $^vC_0^7$ also wird jede weitere $F_2^4\gamma$ mit jedem der 3 Äste in O oskuliert, d. h. dreipunktig berührt, trifft sie somit in 9 ∞ benachbarten Punkten, die je zu dreien auf einem Zweige liegen.

Diese Oskulation stellt, wie bekannt, 6 Bedingungen für eine Fläche vor. Das F-System $d^2 + g + O + M$ soll also ein Gebüsch bestimmen. In der Tat ist $21 + 3 + 6 + 1 = 31$, sodaß eine dreifach ∞ Mannigfaltigkeit resultiert. Jede $F_2{}^4\gamma$ wird von jeder Schnittlinie $(F_2{}^4\alpha \times F_2{}^4\beta)$ noch in einem einzigen variablen Punkte getroffen, denn ${}^{v}C_0{}^7$ stützt sich 7 mal auf d^2, 3 mal auf g, wie aus der Abbildung ersichtlich, trifft $F_2{}^4\gamma$ in O 9 mal und außerdem in M einmal: $4 \cdot 7 - (2 \cdot 7 + 3 + 9 + 1) = 1$.

Die Flächen $F_2{}^4$ mit gemeinsamem Doppelkegelschnitt und einer gemeinsamen Geraden bilden ein homaloidisches Gebüsch, wenn sie noch durch einen einfachen F-Punkt gehen und in einem Punkte O eine feste Fläche $F_2{}^4\alpha$ des Gebüsches oskulieren. Hievon ausgehend gelangt man zu einer (4,7) Verwandtschaft.

Die F-Elemente derselben bestimmt man mittels der Abbildung der Ebene α'' auf eine Ebene α', die wie wir aus Kapitel II § 2 wissen, durch eine Cremona-Transformation geschieht. Die beigegebene Figur stellt die 2 Ebenen α'' und α' vor, welche durch eine Cremona-Transformation (5,5) aufeinander bezogen sind. In α'' sind die F-Elemente eingezeichnet, sodaß l_1, l_2, m den F-Punkten A'_1, A'_2, M', dagegen die Kurven l_3, l_4, l_5, o den F-Punkten A'_3, A'_4, A'_5, O' entsprechend zugeordnet sind.

Man entnimmt nun dieser Abbildung:

1.) Dem g entspricht eine Kurve k'^3_g der Ebene α', welche geht durch:

A'_1 einmal	A'_4 einmal
A'_2 einmal	A'_5 zweimal
A'_3 einmal	M' einmal
	O' einmal

Da nun g eine einfache F-Kurve von Σ ist, so entspricht ihm in Σ' eine von Geraden erzeugte Fläche. Dieselbe wird von der Ebene α' in k'^3_g geschnitten. In der Tat ist es eine Regelfläche 3. Ordnung Φ^3, mit einer Doppelgeraden, die durch A'_5 geht. Hieraus entnehmen wir also bereits, daß durch A'_5 eine F-Gerade h_1 geht.

2.) Dem M entspricht in α' eine Gerade μ', durch O' und A'_5 einmal gehend. In Σ' somit eine Ebene u durch die Gerade h_1; für die Jakobische Fläche zählt dieselbe doppelt. Man erkennt jetzt auch, daß hurch O' eine F-Gerade h geht und daß h und h_1 sich schneiden.

3.) Dem O entspricht in α' eine Kurve o'_3 durch:

A'_1 einmal	A'_3 einmal	A'_5 einmal	O' zweimal
A'_2 einmal	A'_4 einmal	M' einmal	hindurchgehend.

In Σ' somit eine Fläche $\Phi^3{}_1$ mit einer Doppelgeraden durch O'.

4.) Dem d^2 entspricht eine Kurve d'_7 in α', welche geht durch:

A'_1 zweimal	A'_3 zweimal	A'_5 dreimal	O' viermal.
A'_2 zweimal	A'_4 zweimal	M' zweimal	

Somit in Σ' eine Fläche Φ^7. Es ist diejenige Fläche des φ^7-Gebüsches, welche M zum Doppelpunkt hat. Sie geht also durch h vierfach, durch h_1 dreifach und von derselben Art müßten sich auch die φ^7 ergeben.

A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 und M' spielen in den Abbildungskurven von g, O und d^2 die gleiche Rolle. Sie stellen die Schnittpunkte der Ebene α' mit einer F-Kurve 5. Ordnung vor. Wenden wir nun den in Kapitel II § 4 zitierten Satz an, der die Vielfachheit der F-Kurven für die Jakobische Fläche angibt! Die Ordnung der Jakobischen Fläche J_{24} des φ^7-Gebüsches ist $4\cdot(7-1) = 24$. Dabei zählt eine Ebene, die einem einfachen F-Punkt entspricht, doppelt, eine Fläche, die einem Berührpunkt der $F_2{}^4$ entspricht dreifach, eine Fläche endlich, die einem Oskulationspunkt zukommt, vierfach.

Wir kontrollieren sonach: $3 + 2\cdot1 + 4\cdot3 + 7 = 24$.

Wievielfach ist nun h für diese Jakobische Fläche J_{24}? Wir zählen ab, wie oft die einzelnen Teile der Fläche durch diese Gerade gehen: $1 + 2 + 4\cdot2 + 4 = 15$. Aus $4i-1 = 15$ finden wir sonach $i = 4$. Die Gerade h ist für die Flächen φ^7 vierfach, wie oben vermutet.

h_1 ist elffach für J_{24} denn: $2+2\cdot1+3+4\cdot1 = 11 = 4\cdot3-1$; $i = 3$.

Also h_1 ist in der Tat dreifache Gerade aller φ^7.

Die Kurve fünfter Ordnung C'_5, die wir fanden ist für J_{24} siebenfach: $1+2+4 = 7 = 4\cdot2-1$.

Diese Kurve C'_5 ist doppelte F-Kurve des Raumes Σ'.

Damit sind aber auch die F-Kurven erschöpft, denn damit ein beweglicher Restschnitt 4. Ordnung bleibt, müssen sich die φ^7 in einer festen Kurve begegnen, deren Ordnung $7\cdot7-4 = 45$ ist. Tatsächlich ist: $5\cdot2\cdot2 + 4\cdot4 + 3\cdot3 = 45$.

Auch das Geschlecht eines ebenen Schnittes der φ^7 ergibt sich jetzt mit dem der ebenen Schnitte in Σ übereinstimmend als $= 1$.

Im allgemeinen ist das Geschlecht einer Kurve 7. Ordnung $= \frac{6.5}{2} = 15$. $15-5\cdot1-3-6 = 1$.

Die Flächen φ^7 im Raume Σ' besitzen also eine vierfache und eine dreifache Gerade, eine doppelte F-Kurve 5. Ordnung und einen einfachen F-Punkt.

Es erwächst uns nunmehr die Aufgabe, die gegenseitige Lagenbeziehung dieser F-Kurven zu diskutieren, wozu uns unsere Kenntnisse über die F-Flächen des Raumes Σ' eine Handhabe bieten.

In Σ' kann es keine Gerade geben, welche 8 F-Punkte enthält, da sonst alle φ^7 durch dieselbe gehen müßten. Somit darf keine Doppelsekante der C'_5 existieren, die h schneidet. h ist also vierfache Sekante der C'_5 und diese letztere rational: C'^5_0. Weil $h + h_1$ den vollständigen Schnitt der Flächen φ^7 mit der Ebene $\overline{h\,h_1}$ bilden, muß C'^5_0 außerdem dem h_1 noch einmal begegnen. In allgemeiner Lage ist es aber auch unter diesen Voraussetzungen ausgeschlossen, daß wie notwendig 2 F-Flächen Φ^3 und Φ^3_1 entstehen, die Regelflächen sind. Wir sind also veranlaßt, der Kurve C'^5_0 eine besondere Gestalt zuzuschreiben. Zur ebenen Kurve kann sie nicht werden, wie man aus dem Schnittgebilde in der α'-Ebene ersieht, auch die Voraussetzung eines dreifachen Punktes führt nicht zum Ziele.

Die Kurve C'^5_0 muß also einen Doppelpunkt S' besitzen, aber auch hier ist noch eine besondere Voraussetzung zu fordern. Von irgend einem Punkte A der h_1 gäbe es ja i. a. an diese nunmehrige Kurve C'^5_0 immer noch 3 Doppelsekanten. Damit nun h_1 aber Doppelgerade der fundamentalen Regelfläche wird, muß vorausgesetzt werden, daß C'^5_0 mit den beiden Ästen, die durch den Doppelpunkt laufen, eine durch h_1 gehende Ebene ε berührt. In diesem Falle rückt jeweils eine der Doppelsekanten, die von A ausgehen, nach h_1, sodaß nur mehr 2 übrig bleiben. Um sich über diese besondere Lagenbeziehung ein Bild zu machen, projiziere man die Kurve C'^5_0 aus dem Punkte A auf irgend eine Ebene. Das Bild ist im allgemeinen Falle eine Kurve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkte und 3 Doppelpunkten. Hier aber ist ein Doppelpunkt noch nach dem dreifachen gerückt, so daß 2 Zweige darin sich berühren. Es bleiben also von jedem A auf h_1 nur noch 2 Doppelsekanten übrig, die Doppelstrahlen des Projektionskegels der C'^5_0 aus A, die nach den 2 Doppelpunkten laufen. Sie erzeugen eine Regelfläche, für welche h_1 Doppelgerade ist. Um die Ordnung zu kontrollieren, betrachte man einen ebenen Schnitt durch h_1. Derselbe trifft außer in S' und dem anderen Punkt der C'^5_0 auf h_1 diese Kurve nur noch zweimal. Die Verbindungslinie der 2 Punkte ist eine Gerade der Fläche und andere Schnittgebilde sind nicht möglich. Somit ist die Fläche als eine Regelfläche dritter Ordnung erkannt; wir haben die F-Fläche Φ^3 vor uns. Die F-Fläche Φ^3_1 ist die Kegelfläche, welche die F-Kurve C'^5_0 aus dem Doppelpunkte S' projiziert.

Das F-System der Flächen φ^7 besteht neben dem einfachen F-Punkt M aus einer 4fachen (h) und einer dreifachen Geraden (h_1), die sich in einem Punkte S′ schneiden, sowie aus einer rationalen Doppelkurve 5. Ordnung (C'^5_0), die in S′ einen Doppelpunkt besitzt und darin mit beiden Zweigen eine durch h_1 gehende Ebene berührt.

Durch die Strahlenkongruenz 1. Ordnung der Kurve C'^5_0 und ihrer vierfachen Sekante h kann jede solche Fläche φ^7 eindeutig auf die Ebene abgebildet werden.

§ 2. Die zwei Verwandschaften (4,6).

I. Lassen wir die Flächen 4. Ordnung außer d^2 noch einen einfachen Kegelschnitt gemeinsam haben, so gelangen wir zu keiner Verwandtschaft, wohl aber, wenn sie 2 windschiefe Gerade gemeinsam besitzen. Von K''_6 in der Ebene α'' müssen sich 2 Gerade ${}^1g''_1$ und und ${}^1g''_2$ abspalten. Die beweglichen ${}^vK''_4$ können ein Netz bilden mit 3 einfachen und 3 doppelten Hauptpunkten, wenn noch ein einfacher M'' und ein doppelter N'' hinzukommen. Der Punkt M im Raume Σ ist ein F-Punkt 1. Ordnung. In N aber berührt jede Fläche $F_2{}^4$ des Gebüsches das feste $F_2{}^4\alpha$, alle Flächen haben dort eine gemeinsame Tangentialebene. Die veränderlichen Kurven ${}^vC^4_0$ haben dort einen Doppelpunkt und berühren darin mit jedem der beiden Zweige die Flächen $F_2{}^4$ des Gebüsches. Ein solcher Berührungspunkt zählt für 3 Bedingungen, sodaß in der Tat $d^2 + g_1 + g_2 + N + M$ zusammen $21 + 3 + 3 + 3 + 1 = 31$ Bedingungen für eine $F_2{}^4$ vorstellen und somit ein Gebüsch festlegen. Auch die übrigen Forderungen für ein homaloidisches Flächensystem sind erfüllt, wie man analog dem vorigen Paragraphen beweist.

Die Flächen $F_2{}^4$ bilden also ein homaloidisches Gebüsch, wenn sie außer d^2 noch 2 windschiefe Gerade g_1 und g_2 gemeinsam haben, durch einen einfachen F-Punkt M gehen und in einem Punkte N eine feste Fläche des Gebüsches berühren.

Beim Aufsuchen der F-Kurven mittels der Abbildung α' tritt etwas Neues auf. Da g_1 und g_2 der Geraden l_1 begegnen und dieselbe auch d^2 schneidet, so geht ein ganzes Bündel von $F_2{}^4$ durch l_1. l_1 bildet sich in einen Punkt der Ebene α' ab. Auf diese Weise gelangen wir von vornherein zu einem fundamentalen Punkt der Ebene α', der A_1' heißen soll.

Mittels einer Cremona Transformation (4,4) wird α'' auf α' bezogen, bei sinngemäßer Anwendung der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise ergibt sich:

1.) Dem g_1 entspricht eine Kurve k'^3_{g1} durch:

M' einmal A'_2 einmal A'_4 einmal A'_5 zweimal
A'_1 einmal A'_3 einmal M' einmal

hindurchgehend.

Somit in Σ' eine Regelfläche 3. Ordnung Φ_1^3 mit der Doppelgeraden h_1 durch A'_5.

2. Dem g_2 entspricht in α' eine Kurve k'^3_{g2} 3. Ordnung, durch:

A'_1 einmal A'_2 einmal A'_4 zweimal N' einmal
M' einmal A'_3 einmal A'_5 einmal

hindurchgehend.

In Σ' somit eine Regelfläche Φ_2^3 mit der Doppelgeraden h_2 durch A'_4.

3. Dem M entspricht μ' durch A'_4 und A'_5 je einmal gehend, im Raume Σ' also eine Ebene durch die zwei sich schneidenden Geraden h_1 und h_2.

4. Dem N entspricht in α' der Kegelschnitt ν^2, durch A'_2, A'_3, A'_4, A'_5, N' je einmal gehend.

Im Raume ist ihm also eine Fläche 2. Ordnung Φ^2 zugeordnet, die h_1 und h_2 zu Erzeugenden besitzt.

5. Dem Doppelkegelschnitt d^2 entspricht in α' die Kurve k'_6, durch:

A'_1 einmal A'_2 zweimal A'_4 dreimal N' zweimal
M' einmal A'_3 zweimal A'_5 dreimal

hindurchlaufend, im Raume daher eine F-Fläche Φ^6, die spezielle Fläche des φ^6-Gebüsches, mit dem Doppelpunkte M.

Mit den nunmehr bekannten Mitteln konstatieren wir, daß für die Flächen φ^6 des Systems in Σ' 2 dreifache Gerade, h_1 und h_2, eine doppelte Raumkurve $C'_0{}^3$, und ein einfacher Kegelschnitt k'^2 fundamental sind.

Über die Rolle der vorausgehend besprochenen Geraden l_1 erfahren wir das folgende: Dem Punkte M' von α' ist in α'' die Gerade m'', im Raume Σ eine Gerade m entsprechend; diese ist Gerade der $F_2{}^4\alpha$ und schneidet g_1, g_2 und d^2. Deshalb wird sie in einen Punkt abgebildet und muß auf einer F-Fläche gelegen sein. $(l_1 + m)$ sind gegeneinander windschief. Sie bilden neben $d^2 + g_1 + g_2$ den

vollständigen Schnitt der Fläche $F_2^4\alpha$ mit der F-Fläche $F^2 = [d^2\, g_1\, g_2]^2$ des Raumes Σ.

Es handelt sich wieder darum, die gegenseitige Lage der F-Kurven im Raume Σ' festzustellen! h_1 und h_2 müssen Doppelsekanten der Kurve C'^3_0 sein, denn von den Punkten dieser 2 Geraden aus können keine Doppelsekanten der C'^3_0 existieren, dieselben wären sonst fundamental. Somit ist die Lage der 3 die folgende: C'^3_0 geht durch den Schnittpunkt $h_1 \times h_2$ und begegnet jeder außerdem noch einmal. Die Ebene des Kegelschnittes k'^2 trifft C'^3_0 dreimal. Würden nun diese 3 Schnittpunkte außerhalb k'^2 liegen, so würde durch $h_1 + k'^2 + C'^3_0$ und durch $h_2 + k'^2 + C'^3_0$ je eine F-Fläche bestimmt, deren Ordnung 3 übersteigt (5. Ordnung). Eine solche kann nicht auftreten, da Φ^6 bereits diskutiert ist.

Fallen aber 2 der Schnittpunkte auf k'^2, dann ist folgendes der Fall:

k'^2 stützt sich je einmal auf h_1 und h_2, zweimal auf C'^3_0.

$h_1 + C'^3_0 + k'^2$ bestimmen eine Regelfläche 3. Ordnung mit der Doppelgeraden h_1; dieselbe ist F-Fläche und $\equiv \Phi_1^3$. $h_2 + C'^3_0 + k'^2$ bestimmen analog Φ_2^3.

Die dem N entsprechende F-Fläche ist der Kegel 2. Ordnung, der C'^3_0 aus S' projiziert, μ die Ebene $\underline{h_1\, h_2}$.

Somit ergab sich:

Das F-System im Raume Σ' besteht außer dem Punkte M aus 2 dreifachen Geraden h_1 und h_2, die sich in einem Punkte S' schneiden, einer doppelten Kurve 3. Ordnung C'^3_0, welche durch S' geht und h_1 und h_2 noch weiterhin je einmal trifft, sowie aus einem einfachen Kegelschnitt k'^2, der je einmal dem h_1 und h_2, zweimal dem C'^3_0 begegnet. Die F-Flächen bestehen aus der Ebene $\mu \equiv \underline{h_1\, h_2}$, den 2 Regelflächen 3. Ordnung $[h_1\, C'^3_0\, k'^2]^3$ und $[h_2\, C'^3_0\, k'^2]^3$, dem Kegel 2. Ordnung $(S'C'^3_0)^2$ und derjenigen Fläche des φ^6-Gebüsches, die M zum Doppelpunkte hat.

Eine eindeutige Abbildung einer solchen Fläche φ^6 liefert die Kongruenz 1. Ordnung, welche durch h_1 und C'^3_0 oder durch h_2 und C'^3_0 bestimmt ist.

II. Zu dem 2. Typus einer (4,6) Verwandtschaft gelangen wir, wenn die Flächen F_2^4 sich längs einer Geraden g_b berühren.

Von K''_6 spaltet sich das zweifach zu zählende ${}^2g''_b$ ab, doch gilt jetzt durchaus nicht g_b als fundamentale Doppelkurve! Die Geraden l_1 und l_2 sind Gerade der Fläche $F_2^4\alpha$, sie enthalten also in ihrem Schnittpunkte mit g_b 2 unendlich nahe Punkte von g_b und berühren jede F_2^4 darin. Sie werden je in einen Punkt der Ebene α' abgebildet.

Die beweglichen Kurven ${}^{\nu}K''_4$ können ein homaloidales Netz bilden, wenn zu den 3 doppelten Hauptpunkten noch 3 einfache, $M''_1\, M''_2\, M''_3$, hinzukommen. $d^2 + g_b + M_1 + M_2 + M_3$ legen ein Gebüsch fest, da sie $21 + 7 + 1 + 1 + 1 = 31$ Bedingungen repräsentieren. Berühren sich also die Flächen $F_2{}^4$ längs einer Geraden g_b, so bilden sie ein homaloidisches System, wenn sie noch durch 3 F-Punkte 1. Ordnung gehen.

Die hiezu erforderlichen Bedingungen können nach nunmehr bekannter Weise nachgewiesen werden. Die Abbildung der Ebene α'' auf α' liefert diesmal:

1. Dem g_b entspricht in α' zweimal eine Kurve k'_4, durch:

A'_1 einmal	M'_1 einmal	M'_3 einmal	A'_4 zweimal
A'_2 einmal	M'_2 einmal	A'_3 zweimal	A'_5 zweimal

hindurchgehend, im Raume Σ' daher eine Fläche Φ^4.

2. Dem M_1 entspricht in α' eine Gerade μ'_1 durch A'_4 und A'_5 je einmal, dem M_2 entspricht in α' eine Gerade μ'_2 durch A'_3 und A'_5 je einmal, dem M_3 entspricht in α' eine Gerade μ'_3 durch A'_3 und A'_4 je einmal hindurchgehend, im Raume sind diesen 3 Punkten bezw. 3 Ebenen μ_1, μ_2, μ_3 zugewiesen.

Wir erkennen bereits hieraus 3 F-Gerade h_1 durch A'_3, h_2 durch A'_4 und h_3 durch A'_5.

3. Dem d^2 entspricht in α' eine Kurve 6. Ordnung d'_6 durch:

A'_1 einmal	A'_3 dreimal	A'_5 dreimal	M'_2 einmal
A'_2 einmal	A'_4 dreimal	M'_1 einmal	M'_3 einmal

hindurchlaufend, im Raume Σ' die F-Fläche Φ^6.

Zieht man hieraus die Folgerungen, so ergibt sich, daß für die Flächen φ^6 des Σ'-Raumes 3 sich in einem Punkte S′ treffende dreifache F-Gerade h_1, h_2, h_3 und eine einfache F-Kurve 5. Ordnung C'^5 existieren.

Für C'^5 haben wir eine allgemeine Kurve 5. Ordnung vorauszusetzen. Dieselbe kann den Ebenen μ_1, μ_2, μ_3 jedoch nur in Punkten der h_1, h_2, h_3 begegnen. Wir gelangen nur dann zu einer F-Fläche Φ^4, wenn wir C'^5 einmal durch S′ gehen und außerdem je zweimal noch jedem h begegnen lassen. Dieser Fall ist wegen der Gleichwertigkeit der 3 dreifachen Geraden auch der natürliche. Die F-Fläche Φ^4 ist die Kegelfläche, die C'^5 aus S′ projiziert, $\mu_1\, \mu_2\, \mu_3$ die durch die 3 Geraden erzeugten Ebenen, Φ^6 die spez. Fläche des φ^6-Gebüsches mit dem Doppelpunkte M.

Das F-System in Σ' besteht außer dem Punkte M aus 3 in einem Punkte S′ zusammenlaufenden dreifachen Geraden und einer ebenfalls durch S′ gehenden allgemeinen Kurve 5. Ordnung, die im weiteren jeder der Geraden noch zweimal begegnet.

Die Strahlen durch S′ treffen darin die Flächen φ^6 fünfmal, liefern also eine eindeutige Abbildung auf die Ebene.

§ 3. Die drei Verwandtschaften (4,5).

Soll der festbleibende Teil der Kurve C^8 nunmehr insgesamt von der 3. Ordnung sein, so sind die zu untersuchenden Möglichkeiten schon sehr zahlreich. Eine Reihe davon führt zu homaloidischen Flächengebüschen, doch lassen sie sich sämtlich in 3 wesentliche Typen gruppieren. Diese 3 wollen wir besprechen, die übrigen sind nur Abarten davon.

I. C^8 zerfalle in eine feste Kurve 3. Ordnung ${}^{f}C^3_0$ und eine bewegliche 5. Ordnung ${}^{v}C^5_0$. Die Bilder der letzteren sind auch Kurven 5. Ordnung ${}^{v}K''_5$ und können ein Netz mit 6 doppelten Hauptpunkten bilden, wenn noch ein doppelter F-Punkt hinzutritt.

Treffen sich sonach die Flächen F^4_2 mit gemeinsamem Doppelkegelschnitt noch in einer Raumkurve 3. Ordnung, so bilden sie ein homaloidisches Gebüsch, wenn sie außerdem in einem gewissen Punkte N eine feste Ebene berühren. In der Tat bedeuten, da ${}^{f}C^3_0$ eine allgemeine Raumkurve 3. Ordnung ist, $d^2 + {}^{f}C^3_0 + N$ insgesamt $21 + 7 + 3 = 31$ Bedingungen und legen ein Gebüsch fest. Auch die übrigen Forderungen für ein homaloidisches Flächensystem lassen sich nachweisen. Die Abbildung ergibt:

1. Dem ${}^{f}C^3_0$ entspricht in α' eine Kurve 5. Ordnung k'_5, durch:

   A'_1 zweimal A'_3 zweimal A'_5 zweimal
   A'_2 zweimal A'_4 zweimal N' zweimal

   hindurchgehend, im Raume Σ' also eine F-Fläche Φ^5 5. Ordnung, die eine Regelfläche sein muß.

2. Dem N kommt in α' ein Kegelschnitt v^2 zu, der durch

   A'_1 einmal A'_3 einmal A'_5 einmal
   A'_2 einmal A'_4 einmal N' einmal

   geht, im Raume sonach eine F-Fläche Φ^2 2. Ordnung. Für die Jakobische Fläche zählt dieselbe dreifach.

3. Dem Doppelkegelschnitt d^2 entspricht in α' eine Kurve k'_5, welche geht durch

A'_1 zweimal A'_3 zweimal A'_5 zweimal
A'_2 zweimal A'_4 zweimal N' einmal.

Man erkennt eine einfache F-Gerade h durch N' und eine doppelte F-Kurve 5. Ordnnng. Diese letztere darf wiederum keine dreifachen Sekanten besitzen, muß also vom Geschlechte 0 sein. Aber dieser allgemeine Fall gestattet noch nicht das Auftreten der oben gefundenen F-Flächen. Besitzt C'^5_0 einen Doppelpunkt, so kommen wir auch zu keinem Resultat, wohl aber, wenn diese Kurve einen dreifachen Punkt besitzt. Die F-Gerade ist eine zweifache Sekante derselben, die aber nicht durch S' geht. Die F-Fläche Φ^2 ist der Kegel 2. Ordnung, der C'^5_0 aus ihrem dreifachen Punkt projiziert, Φ^5 die Regelfläche derjenigen Doppelsekanten von C'^5_0, welche h zur Leitlinie haben. Von einem Punkte A dieser Geraden h aus projiziert man ja die Kurve 5. Ordnung durch einen Kegel 5. Ordnung vom Geschlechte 0. Derselbe besitzt einen nach S' laufenden dreifachen, sowie den doppelten Strahl h, muß also noch 2 weitere Doppelstrahlen, nämlich 2 durch A laufende Erzeugende der Regelfläche Φ^5, besitzen. Jede Ebene durch h trifft Φ^5 in dem doppelten h und des weiteren in 3 Regelstrahlen, die durch die 3 außerhalb liegenden Schnittpunkte dieser Ebene mit der Kurve C'^5_0 bestimmt werden.

Die Flächen φ^5 des Raumes Σ' haben somit außer dem F-Punkte M eine doppelte Kurve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkte, sowie eine Sehne derselben als einfache F-Gerade gemeinsam.

II. Der festbleibende Teil der Kurve C^8 bestehe nunmehr aus einer Geraden g und einem Kegelschnitt k^2, die sich beide nicht treffen.

Die bewegliche Kurve ${}^{\nu}K''_4$ in der Bildebene α'' kann ein Netz bilden, mit 3 doppelten und 3 einfachen F-Punkten, wenn noch 2 einfache F-Punkte M_1, M_2 hinzutreten. In der Tat beschränken auch $d^2 + g + k^2 + M_1 + M_2$ durch $21 + 3 + 5 + 1 + 1 = 31$ Bedingungen die Flächen F^4_2 auf eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Man zeigt wieder, daß die Flächen F^4_2 ein homaloidisches Gebüsch bilden, wenn sie neben dem Doppelkegelschnitt d^2 durch eine Gerade g und einen dieselbe nicht schneidenden Kegelschnitt k^2 hindurchgehen und 2 F-Punkte M_1, M_2 erster Ordnung besitzen. Die Abbildung der Ebenen α'' und α' liefert hier:

1. Dem g entspricht in α' eine Kurve k'_3, durch

   A'_1 einmal A'_4 einmal M'_1 einmal A'_3 zweimal
   A'_2 einmal A'_5 einmal M'_2 einmal

   hindurchgehend, im Raume Σ' daher eine fundamentale Regelfläche Φ^3 mit der Doppelgeraden h durch A'_3.

2. Dem Kegelschnitte k^2 entspricht eine Kurve k'_4 in α', durch:

   A'_1 einmal A'_3 zweimal A'_5 zweimal M'_1 einmal
   A'_2 einmal A'_4 zweimal M'_2 einmal

   hindurchgehend. Die entsprechende F-Kurve in Σ ist eine Regelfläche 4. Ordnung Φ^4.

3. Dem Punkte M_1 entspricht in α' eine Gerade μ'_1 durch
   A'_3 und A'_5 einmal
   dem Punkte M_2 entspricht in α' eine Gerade μ'_2 durch
   A'_3 und A'_4 einmal
   hindurchgehend. Im Raume erhalten wir entsprechend die F-Ebene μ_1 und μ_2. Wir erkennnen hier bereits 2 weitere F-Gerade, h_1 durch A'_5 und h_2 durch A'_4.

4. Dem Doppelkegelschnitt d^2 entspricht eine Kurve d'_5, durch:

   A'_1 einmal A'_3 dreimal A'_5 zweimal M'_2 einmal
   A'_2 einmal A'_4 zweimal M'_1 einmal

   hindurchlaufend. Die zugehörige F-Fläche ist von der 5. Ordnung Φ^5.

Die Diskussion liefert für die Flächen φ^5 diesmal 2 doppelte $[h_1, h_2]$ und eine dreifache Gerade h, die nach einem Punkte S' laufen, außerdem eine einfache Raumkurve C'^4 4. Ordnung als F-Kurven.

Würde von der allgemeinen Raumkurve 4. Ordnung C'^4 nur ein Punkt auf der Geraden h liegen, so müßte die Ebene $\overline{h_1 h_2}$ diese Kurve sechsmal schneiden, was unmöglich ist. Somit müssen mindestens 2 Punkte auf h liegen, auch h_1 und h_2 werden zweimal geschnitten. Es gibt jetzt also von S' aus 3 Doppelsekanten, die Kurve C'^4 ist somit rational.

Von jedem Punkte der Geraden h gehen 2 Sehnen nach dieser Kurve, dieselben erzeugen die F-Fläche Φ^3. Der Kegel, der C'^4_0 aus S' projiziert, ist die F-Fläche Φ^4, er enthält in der Tat h_1, h_2 und h als Doppelgerade.

Die Grundelemente des Flächensystems der φ^5 in Σ' bestehen also außer dem einfachen F-Punkte M aus einer dreifachen Geraden h, 2 doppelten h_1 und h_2, die sämtlich in einem Punkte S' zusammenlaufen, und einer einfachen Kurve 4. Ordnung 2. Art, welche jeder der 3 Geraden zweimal begegnet.

III. Im 3. Falle besteht der fundamentale Teil der Kurve C^8 aus einer Geraden g und einer weiteren, sie schneidenden Geraden g_b, längs der alle Flächen $F^4{}_2$ sich berühren. Von der Bildkurve K''_6 spaltet sich zweimal das g''_b, ferner g'' ab. Die beweglichen Kurven K''_3 können ein homaloidales Netz bilden, wenn noch 2 einfache F-Punkte auftreten.

Wiederum repräsentieren $d^2 + g_b + g + M_1 + M_2$ zusammen $21 + 7 + 1 + 1 + 1 = 31$ Bedingungen. Man weist wieder nach:

Die Flächen $F^4{}_2$ bilden ein homaloidisches Flächensystem, wenn sie neben dem Doppelkegelschnitt d^2 noch eine Gerade g gemeinsam haben, längs einer 2., das g schneidenden Geraden g_b sich berühren und 2 F-Punkte M_1 und M_2 1. Ordnung besitzen.

Die Abbildung der Ebene α'' auf α' geschieht gemäß einer (3,3) Transformation und liefert:

1. Dem g entspricht in α' eine Gerade μ' durch:
   M'_1 einmal und M'_2 einmal gehend, in Σ' somit eine Ebene μ und zwar ein Strahlenbüschel darin!

2. Dem g_b entspricht in α' zweimal eine Kurve k'_3 3. Ordnung, welche geht durch:

A'_1 einmal	A'_3 einmal	M'_1 einmal	A'_5 zweimal
A'_2 einmal	A'_4 einmal	M'_2 einmal	

   Im Raume ist ihr eine Kegelfläche Φ^3 3. Ordnung [vgl. § 2^{II} dieses Kap.] mit der Doppelgeraden h durch A'_5.

3. Dem Punkte M_1 entspricht in α' eine Gerade μ'_1 durch M'_1 und A'_5 je einmal, dem Punkte M_2 entspricht in α' eine Gerade μ'_2 durch M'_2 und A'_5 je einmal gehend.
   Im Raume Σ' sind ihnen bezw. die Ebenen μ_1 und μ_2 zugeordnet. Wir erkennen zugleich hier eine fundamentale Gerade h_1 durch M'_1 und h_2 durch M'_2.

4. Dem d^2 entspricht eine Kurve k'_5 5. Ordnung der Ebene α'.

Dieselbe geht durch:

A'_1 einmal	A'_3 einmal	A_5 dreimal	M'_2 zweimal
A'_2 einmal	A'_4 einmal	M'_1 zweimal	

Im Raume entspricht ihr die bes. Fläche Φ^5 des φ^5-Gebüsches.

Die Flächen φ^5 des Raumes Σ' bilden ein homaloidisches Flächensystem mit einer dreifachen Geraden h, zwei doppelten Geraden h_1 und h_2, und einer einfachen Kurve 4. Ordnuug als Grundelementen.

Die 3 Geraden begegnen sich in S', die Lage ist hier jedoch nicht mehr so allgemein wie in II. dieses Paragraphen. Hier wird erforderlich, daß die Kurve 4. Ordnung rational ist: C'^4_0 und durch den gemeinsamen Punkt S' der 3 Geraden hindurchgeht.

Der 4. Schnittpunkt, den C'^4_0 mit der Ebene $\overline{h_1 h_2}$ bildet, der Punkt D' ist Träger des Strahlenbüschels, dessen Gerade den einzelnen Punkten von g entsprechen, somit ist die Ebene $\mu \equiv \overline{h_1 h_2}$. Φ_3 ist die Kegelfläche, durch welche C'^4_0 aus S' projiziert wird, μ_1 und μ_2 sind die Ebenen $\overline{h h_1}$ resp. $\overline{h h_2}$.

Die Flächen des Raumes Σ' gehen sonach neben dem Punkt M durch eine dreifache [h] und 2 doppelte Gerade [h_1, h_2], die sämtlich nach einem Punkte S' laufen, außerdem durch eine rationale Raumkurve 4. Ordnung C'^4_0, die durch S' geht, h zur dreifachen Sekante besitzt und dem h_1 und h_2 weiterhin noch einmal begegnet.

§ 4. Die Verwandtschaft (4,3).

In dem hier zur Diskussion stehenden Falle muß sich von der Kurve C^8 eine F-Kurve 5. Ordnung abspalten. Hiebei hat man zuvörderst zu berücksichtigen, daß es, ähnlich der Verwandtschaft (4,4), zweierlei Kurven 5. Ordnung, solche vom Geschlechte 1 und solche vom Geschlechte 0 auf einer Fläche F_2^4 gibt. Diese letzteren Kurven, also die rationalen, führen jedoch zu keinem homaloidischen Gebüsche. Im übrigen lassen sich sämtliche Raumverwandtschaften (4,3), die man hier erhält, zu einem einzigen Typus gruppieren, sie sind nur Abarten einer einzigen allgemeinen Verwandtschaft, die wir jetzt besprechen wollen.

Die fundamentale Kurve sei also von der 5. Ordnung und dem Geschlechte 1 [$^1C^5_1$] und werde beispielsweise in α'' durch eine Kurve 3. Ordnung $^1K''_3$ abgebildet. Die bewegliche Restkurve $^vK''_3$ kann ein

Netz bilden mit einem doppelten und 4 einfachen Hauptpunkten, ohne daß noch weitere F-Elemente notwendig werden.

Um zu entscheiden, wieviele Bedingungen eine Fläche F_2^4 erfüllen muß, um durch eine Kurve C^5_1 dieser Art zu gehen, müssen wir erst feststellen, wieviele solche C^5_1 auf einer Fläche F_2^4 möglich sind. Wir nehmen also umgekehrt an, der feste Schnitt zweier F_2^4 bestehe aus $d^2 + C_0^3$, und konstatieren, daß alsdann der Restschnitt C^5_1 sich fünfmal auf C_0^3, fünfmal auf d^2 stützt. Aus der Abbildung ist zu lesen, daß K''_3, das Bild der nunmehr beweglichen C^5_1 durch 4 feste Punkte gehen muß; damit wird ihre Vielfachheit auf eine fünffach unendliche beschränkt! Durch Angabe von 5 Punkten ist also C^5_1 auf F_2^4 völlig bestimmt, wenn bekannt ist, daß diese Kurve sich fünfmal auf d^2 und fünfmal auf C_0^3 stützt. Lassen wir jetzt C_0^3 wieder fort, so sind, um C^5_1 auf F_2^4 festzulegen, noch 5 weitere Punkte, im ganzen also $5 + 5 = 10$ Bedingungen erforderlich. Soll also eine Fläche F_2^4 außer durch d^2 noch durch eine solche Kurve C^5_1 gehen, so werden von ihr $21 + 10 = 31$ Bedingungen verlangt. Man beweist wieder: Die Flächen F_2^4 mit gemeinsamem Doppelkegelschnitt bilden ein homaloidisches System, wenn sie außerdem sämtlich durch eine Kurve 5. Ordnung vom Geschlechte 1 hindurchlaufen.

Die Abbildung von α'' auf α' liefert:

1. Dem C^5_1 entspricht in α' eine Kurve k'_5 durch:

A'_1 zweimal	A'_4 zweimal
A'_2 zweimal	A'_5 zweimal
A'_3 zweimal	

hindurchgehend, im Raume daher eine Regelfläche Φ^5 5. Ordnung.

2. Dem d^2 entspricht in α' eine k'_3 durch:

A'_1 einmal	A'_4 einmal
A'_2 einmal	A'_5 einmal
A'_3 einmal	

hindurchgehend, im Raume Σ' also eine Fläche Φ^3 3. Ordnung mit dem Doppelpunkte M.

Die Flächen φ^3 sind von der 3. Ordnung und schneiden sich alle in einer festen Kurve 5. Ordnung. Da die Flächen sich weiterhin in einer variablen Kurve ${}^{\nu}\Gamma_0^4$ treffen, so muß die F-Kurve vom Geschlechte 1 sein. Diese Verwandtschaft wurde bereits von Cremona aufgefunden! Φ^5 ist die Regelfläche der dreifachen Sekanten von C'^5_1, d. h. der Fundamentalkurve des Raumes Σ'.

Die Flächen φ^3 im Raume Σ' sind sonach von der 3. Ordnung und haben eine einfache F-Kurve 5. Ordnung vom Geschlechte 1, sowie einen einfachen Punkt M gemeinsam.

Trennt sich von der Kurve C^8 ein fester Teil 6. oder 7. Ordnung ab, so kann kein homaloidisches Flächensystem mehr entstehen, da der veränderliche Kegelschnitt sowohl, wie die Gerade auf $F^4_2\alpha$ gar kein Netz bilden kann. Wie schon Clebsch gezeigt hat, gibt es nur 10 Kegelschnittscharen und 16 Gerade auf der Fläche.

Wir erhalten somit als wesentlich verschiedene Fälle:

3 Verwandtschaften vom Typus (4,5), 2 vom Typus (4,6) und je eine vom Typus (4,7), (4,4) und (4,3). Sie liefern 8 verschiedene eindeutige Abbildungen der Fläche F^4_2 und in den neuauftretenden Flächen 7., 6., 5. und 3. Ordnung eindeutig auf die Ebene abbildbare Flächen, sog. Homaloide.

München, 22. Januar 1913.

Hans Pelzner.

Literatur-Verzeichnis

Reye: Geometrie der Lage. Bd. 1. Bd. 2.

Doehlemann: Geometrische Transformationen. Bd. 1. Bd. 2.

Sturm, R.: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd. 1—4.

Martinetti: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. 2. Vol. XVIII. 1885: „Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio." S. 132—142.

Montesano: Lomb. Ist. Rend. Ser. 2. Vol. XXI. 1888. Su le trasformazioni involutorie monoidali. S. 579—594. S. 684—690.

Noether: Mathem. Annalen. Bd. 3. S. 547. „Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen."

Sturm, R.: Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung.

Sturm, R.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 14. S. 18—24: „Über diejenigen Cremonaschen Verwandtschaften, bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung im anderen entsprechen."

Clebsch: Crelle'sches Journal für Mathematik. Bd. 69. S. 162.